Correction DS 6

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \exp(\frac{-1}{x^2})$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
5. On admet que pour tout n il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})f(x).$$

(Ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ ème de f)

(a) Expliciter les polynômes P_0 et P_1

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$P_{n+1}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + 2\frac{1}{x^3}P_n(\frac{1}{x})$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n$$

(d) Soit d_n le degré de P_n, justifier que $d_{n+1} = d_n + 3$ et en déduire la valeur de d_n.

Correction 1.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^3}\exp(\frac{-1}{x^2}}$$

2. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} \exp(y) = 0$ donc par composée de limites

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2)} & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}}$$

3. On pose pour $x \neq 0$,

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\exp(\frac{-1}{x^2}}{x}$$

On a par croissance comparés $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(\frac{-1}{x^2}}{x} = 0$ Ainsi

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } O \text{ et } f'(0)=0}$$

4. On a vu à la question 1 que f était dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à dérivée continue. Vérifions que f' est continue en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^3}\exp(\frac{-1}{x^2} = 0$ par croissance comparée. Or $f'(0)=0$, donc f' est continue en 0. Ainsi

$$\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

5. (a) On a $f^{(0)}(x) = f(x)$ donc $P_0 = 1$ On a $f^{(1)}(x) = \frac{2}{x^3}f(x)$, donc $P_1 = 2X^3$.

   (b) On dérive l'expression donnée entre $f^{(n)}$ et P_n : On a d'une part

   $$f^{(n)'}(x) = f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})f(x)$$

   et d'autre part

   $$f^{(n)'}(x) = \frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})f(x) + P_n(\frac{1}{x}f'(x)$$

   Or $f'(x) = \frac{2}{x^3}f(x)$, donc

   $$f^{(n)'}(x) = \left(\frac{-1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + P_n(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}\right)f(x)$$

   Comme $f(x)\neq 0$ pour tout $x\neq 0$ on obtient en simplifiant :

   $$\boxed{P_{n+1}(\tfrac{1}{x}) = \left(\tfrac{-1}{x^2}P_n'(\tfrac{1}{x}) + P_n(\tfrac{1}{x})\tfrac{2}{x^3}\right)}$$

   (c) L'égalité précédente est obtenue pour tout $x\neq 0$. Comme $\frac{1}{x}$ prend une infinité de valeurs sur $\mathbb{R}^*$, les deux polynômes P_{n+1} et $-X^2P_n' + 2X^3P_n$ prennent des valeurs identiques une infinité de fois. Ainsi ces deux polynômes sont égaux :

   $$\boxed{P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n}$$

   (d) En prenant l'égalité précédente et vérifiant l'égalité des degré on obtient

   $$\begin{aligned} deg(P_{n+1}) &= deg(-X^2P_n' + 2X^3P_n) \\ d_{n+1} &= deg(-X^2P_n' + 2X^3P_n) \end{aligned}$$

   Or $deg(-X^2P_n') = 2 + d_n - 1 = d_n + 1$ et $deg(2X^3P_n) = 3 + d_n$ donc $deg(-X^2P_n') \neq deg(2X^3P_n)$. Ainsi

   $$deg(-X^2P_n' + 2X^3P_n) = max(deg(-X^2P_n'), deg(2X^3P_n)) = 3 + d_n$$

   Donc

   $$\boxed{d_{n+1} = d_n + 3}$$

   On reconnaît une suite arithmétique : on a donc

   $$\boxed{d_n = 3n + d_0 = 3n}$$

Exercice 2. On dispose d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On fait des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

— Si la boule tirée est de couleur blanche, on la remet et on ajoute une boule blanche

— Si la boule tirée est de couleur rouge, on la remet et on ajoute une boule rouge.

On appelle B_i l'événement "tirer une boule blanche au i-iéme tirage" et on note $p_i = P(B_i)$.

1. Calculer p_1 en fonction de b et r.
2. Montrer que $p_2 = \frac{b}{b+r}$.
3. On a tiré une boule blanche au deuxième tirage. Donner alors la probabilité que l'on ait tiré une boule blanche au premier tirage en fonction de b et r.
4. On appelle E_n l'événement

$$E_n : \text{" On tire que des boules blanches sur les } n \text{ premiers tirages "}$$

et F_n l'événement

$$F_n : \text{" On tire pour la première fois une boule rouge au } n\text{-ième tirage"}$$

   (a) Exprimer E_n à l'aide des événements $(B_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$

   (b) Exprimer F_n à l'aide de E_{n-1} et B_n

5. Pour tout $k \geq 2$ calculer $P_{E_{k-1}}(B_k)$.
6. Calculer $P(E_n)$ en fonction de b, r et n puis $P(F_n)$.

Correction 2.

1. On a $p_1 = P(B_1)$. Comme il y a b boules et $b+r$ boules en tout, on en déduit que $P(B_1) = \frac{b}{b+r}$

$$\boxed{p_1 = \frac{b}{b+r}}$$

2. On utilise le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$, la formule des probabilités totales donnent :

$$p_2 = P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})P(\overline{B_1})$$

Si on a tiré une boule blanche au tirage 1, il y a $b+1$ boules blanches dans l'urne et r boules rouges, donc

$$P(B_2|B_1) = \frac{b+1}{b+r+1}$$

De même, si on a tiré une boule rouge au tirage 1, il y a b boules blanches dans l'urne et $r+1$ boules rouges, donc

$$P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b}{b+r+1}$$

D'après le calcul de p_1, on sait que $P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) = 1 - \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}$
Ainsi

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{b+1}{b+r+1}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1}\frac{r}{b+r} \\ &= \frac{(b+1)b}{(b+r+1)(b+r)} + \frac{br}{(b+r+1)(b+r)} \\ &= \frac{(b+1+r)b}{(b+r+1)(b+r)} \\ &= \frac{b}{b+r} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_2 = \frac{b}{b+r}}$$

3. On cherche à calculer $P(B_1|B_2)$ et on utilise pour cela la formule de Bayes :

$$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_2|B_1)P(B_1)}{P(B_2)}$$

Or on a vu que $P(B_1) = P(B_2)$ donc

$$P(B_1|B_2) = P(B_2|B_1)$$

Ainsi

$$\boxed{P(B_1|B_2) = \tfrac{b+1}{b+r+1}}$$

4. (a) $E_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$.
   (b) $F_n = E_{n-1} \cap \overline{B_n}$.
5. Si l'événement E_{k-1} est réalisé, on a tiré que des boules blanches sur les $k-1$ premiers tirages. Il y a donc $b+k-1$ boules blanches et $b+k-1+r$ boules au total. Donc

$$\boxed{P(B_k|E_{k-1}) = \tfrac{b+k-1}{b+k-1+r}}$$

6. On utilise la formule des probabilités conditionnelles et on obtient :

$$P(E_n) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_2 \cap B_1)\dots P(B_n|B_{n-1} \cap \cdots \cap B_2 \cap B_1)$$

Remarquons que les termes du produit sont de la forme $P(B_k|E_{k-1})$ que l'on a calculé à la question précédente. On a donc

$$\begin{aligned}
P(E_n) &= P(B_1)\prod_{k=2}^{n} P(B_k|E_{k-1}) \\
&= \frac{b}{b+r}\frac{b+2-1}{b+2-1+r}\frac{b+3-1}{b+2-1+r}\cdots\frac{b+n-1}{b+n-1+r} \\
&= \frac{b}{b+r}\frac{b+1}{b+1+r}\frac{b+2}{b+2+r}\cdots\frac{b+n-1}{b+n-1+r} \\
&= \frac{(b+n-1)!}{(b-1)!}\frac{(b+r-1)!}{(b+n-1+r)!}
\end{aligned}$$

7. On en déduit la valeur de $P(F_n)$ de nouveau en utilisant la formule des proababilités conditionnelles :

$$P(F_n) = P(E_{n-1} \cap \overline{B_n}) = P(E_{n-1})P(\overline{B_n}|E_{n-1})$$

Si l'événement E_{n-1} est réalisé, il y a r boules rouges et $b+n-1+r$ boules au total. Donc

$$P(F_n) = \frac{r}{b+n-1+r}$$

8. (a)
```
def urne(b,r):
    L=['B' for i in range(b)] +['R' for i in range(n)]
    return(L)
```
   (b)
```
from random import randint
def tirage(L):
        nouvel_urne=L[:]
        k=randint(0,len(L)-1)

        if L[k]=='B':
```

```
            print('Boule blanche')
            nouvel_urne=nouvel_urne+['B']
        else:
            print('Boule Rouge')
            nouvel_urne=nouvel_urne+['R']
        return(nouvel_urne)
```

(c)

```
def compte(L):
    b=0
    for e in L:
        if e=='B':
            b=b+1
    return(b)
```

(d)

```
def experience(b,r,N):
    U=urne(b,r)
    for k in range(N):
        U=tirage(U)
    boule_b=compte(U)
    return(boule_b)
```

Exercice 3. On dispose d'une urne $\mathcal{U}$ contenant 3 boules numérotées : $-1, 0$ et 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait $(n+1)$ tirages aléatoires et avec remise dans cette urne.

On note la valeur des boules des $(n+1)$ tirages dans une liste, la valeur de la première boule tirée sera notée a_0, puis la seconde a_1 et ainsi de suite jusqu'à la dernière boule tirée qui sera notée a_n. On dispose donc d'une liste de nombres $L = [a_0, ..., a_n]$ chacun étant pris aléatoirement dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.

A cette liste L on associe le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note Z_i l'événement, 'le numéro de a_i vaut 0'

1. Que vaut $P(Z_i)$?
2. On fait $(n+1)$ tirages comme décrit précédemment et on note Q le polynôme qui en résulte. Quelle est la probabilité que Q soit le polynôme nul ?
3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $k \in N^*$ Rappeler la définition de "a est racine d'ordre exactement[1] k de Q"
4. Donner la probabilité que Q admette 0 comme racine double (c'est-à-dire d'ordre exactement 2. On suppose que l'on fait au moins 3 tirages.)
5. Soit $p \leq n$. On note D_p l'événement "Q est degré p"
   Montrer que
   $$P(D_p) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-p)}$$
6. On dispose d'une seconde urne contenant des boules numérotées de 0 à n. On tire aléatoirement une boule dans cette urne, on note k son numéro. Ensuite on fait $(k+1)$ tirages aléatoires avec remise, comme décrit précédemment, dans l'urne $\mathcal{U}$. Puis on associe à ces tirages le polynôme Q.
   (a) Soit T_{k+1} l'événement " On tire la boule numérotée k "[2]. Donner la probabilité $P(T_{k+1})$.

1. C'est à dire d'ordre k mais pas d'ordre $k+1$
2. Noté T_{k+1} car alors on fait $(k+1)$ tirages

(b) Montrer que la probabilité que Q soit nul vaut :

$$\frac{1}{2(n+1)}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}\right)$$

(c) Soit $p \leq n$. Montrer que la probabilité que Q soit de degré p vaut :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=p}^{n}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-p)}$$

(d) Calculer la somme précédente.

Correction 3. On rappelle que l'on effectue $(n+1)$ tirages indépendants avec remise dans une urne contenant les boules numérotées $-1, 0$ et 1. On définit le polynôme :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où chaque a_k est tiré aléatoirement dans $\{-1, 0, 1\}$.

1. **Calcul de $P(Z_i)$** :
   L'événement Z_i correspond au tirage de la boule portant le numéro 0. Chaque tirage étant équiprobable parmi $\{-1, 0, 1\}$, on a :
   $$P(Z_i) = \frac{1}{3}.$$
2. **Probabilité que Q soit le polynôme nul** :
   Pour que $Q = 0$, il faut que chaque a_k soit nul, ce qui signifie que tous les $(n+1)$ tirages donnent la valeur 0. La probabilité d'obtenir 0 à un tirage est $\frac{1}{3}$, et comme les tirages sont indépendants :
   $$P(Q = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$
3. **Définition d'une racine d'ordre exactement k** :
   Un réel a est racine d'ordre exactement k d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ si et seulement si :
   $$Q(a) = Q'(a) = \cdots = Q^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad Q^{(k)}(a) \neq 0.$$
4. **Probabilité que Q admette 0 comme racine double** :
   Pour que 0 soit une racine double, il faut que $a_0 = a_1 = 0$ mais que $a_2 \neq 0$. Comme les coefficients sont indépendants, on a :
   $$P(Z_0 \cap Z_1 \cap \overline{Z_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}.$$
5. **Probabilité que** $\deg(Q) = p$: L'événement D_p correspond au fait que :
   — $a_p \neq 0$, ce qui peut s'écrire comme l'événement complémentaire de Z_p, soit $\overline{Z_p}$,
   — Tous les coefficients d'indice supérieur sont nuls, c'est-à-dire $a_{p+1} = a_{p+2} = \cdots = a_n = 0$, ce qui correspond aux événements $Z_{p+1}, Z_{p+2}, \ldots, Z_n$.

Ainsi, on peut écrire :

$$D_p = \overline{Z_p} \cap Z_{p+1} \cap Z_{p+2} \cap \cdots \cap Z_n.$$

Donc

$$P(D_p) = P(\overline{Z_p}) \cdot P(Z_{p+1} = 0) \cdots P(Z_n = 0).$$

On a $P(Z_p) = \frac{2}{3}$ et $P(Z_k) = \frac{1}{3}$ pour $k > p$, d'où :

$$P(D_p) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-p}.$$

6. **Probabilités dans le cas de la seconde urne** :

   (a) **Probabilité de tirer k dans la seconde urne** :
   La seconde urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n, donc :

   $$P(T_{k+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

   (b) **Probabilité que Q soit nul** :
   La probabilité que Q soit nul sachant que l'on a fait $(k+1)$ tirages est $\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$. En appliquant la formule des probabilités totales au SCE $(T_1, \cdots, T_n)$ On obtient

   $$P(Q = 0) = \sum_{k=0}^{n} P(T_{k+1}) P_{T_{k+1}}(Q = 0).$$

   En remplaçant :

   $$P(Q = 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}.$$

   Cette somme est une somme géométrique classique :

   $$P(Q = 0) = \frac{1}{n+1} \times \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2(n+1)}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

   (c) **Probabilité que** $\deg(Q) = p$:
   En raisonnant comme précédemment :

   $$P_{T_{k+1}}(D_p) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-p}.$$

   En sommant :

   $$P(D_p) = \sum_{k=p}^{n} P(T_{k+1}) P_{T_{k+1}}(D_p).$$

   $$P(D_p) = \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{n+1} \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-p}.$$

   (d) **Calcul de la somme** :
   La somme est une série géométrique :

$$\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-p}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-p+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-p+1}\right).$$

Donc :

$$P(D_p)=\frac{1}{n+1}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-p+1}\right).$$

Ce qui donne finalement :

$$P(D_p)=\frac{1}{n+1}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-p+1}\right).$$

On fera au choix l'exercice 4 ou le Problème 1 (plus difficile)
Dans tous les cas, on demande de justifier proprement toutes les inégalités.

Exercice 4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0.$$

   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n \geq 0.$$

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)I_n \leq e.$$

   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$$

   (e) En déduire l'équivalent :

$$I_n \sim_{+\infty} \frac{e}{n}$$

.

Correction 4.

1. Pour tout $x \in]1, e[$, $0 < \ln(x) < 1$, donc $\ln(x)^n \ln(x) < \ln(x)^n$. On obtient bien

$$\boxed{\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} > 0}$$

2. En intégrant, par positivité de l'intégrale on a

$$\int_1^e \ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} dx > 0$$

$$\boxed{\text{Donc } I_n > I_{n+1} \text{ et la suite est bien décroissante.}}$$

3. vu en cours.

$$\int_1^e \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx$$

Donc

$$\boxed{\int_1^e \ln(x)dx = e - (e-1) = 1}$$

4. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$. On a $u(x) = x$ et $v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n$. Et finalement

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e 1(\ln(x))^{n+1}dx \\ &= [x(\ln(x))^{n+1}]_1^e - \int_1^e x(n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

5. Comme $\ln(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, e]$, $\ln(x)^n \geq 0$.

$$\boxed{\text{Par positivité de l'intérgale, } I_n \text{ est positive.}}$$

6. D'après la question 2b, $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ et d'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ donc $e - I_{n+1} \leq e$.

$$\boxed{\text{On a bien } (n+1)I_n \leq e.}$$

7. Les question précédentes montre que

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure que

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et sa limite vaut } 0.}$$

8. D'après la question 2b, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ donc

$$(n+1)I_n + I_{n+1} = e$$

et finalement $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$ Comme $\lim I_n = \lim I_{n+1} = 0$ on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = e.}$$

OU

Problème 1. Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

On admet que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > x$ puis démontrer que $\forall x \in D_g$, $g(x) > 0$.
   (c) Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et montrer que sa dérivée en tout point de $\mathcal{D}_g$ vaut :

   $$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

   (d) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0
   (a) (difficile) Montrer que $\forall x \in]0, 1[$:

   $$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$

   (On pourra commencer par faire un encadrement de $\frac{1}{\ln(t)}$ et on fera <u>très</u> attention aux différents inégalités mises en jeu, (ordre de x et x^2, signe du ln, croissance ou décroissance des fonctions...))
   (b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0

(c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.

3. Etude au voisinage de 1.

   (a) A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $h(t) = \ln(t) - t$ montrer que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$0 \leq \frac{\ln(t) - t + 1}{t - 1} \leq \frac{1-t}{t}$$

   (b) En déduire que pour tout $t \in]0,1[$:
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t - 1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$
   On admet que l'on peut montrer de manière analogue que pour tout $t > 1$ on
   $$\left|\frac{\ln(t) - t + 1}{t - 1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

   (c) (très difficile) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$
   $$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 2$$

   (d) (très difficile) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.

Correction 5.

1. Etude globale

   (a) On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(x)$ soit défini, c'est-à-dire $x > 0$ et tel que $\ln(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$. On a donc $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$. La fonction f est continue sur son ensemble de définition comme quotient de fonction usuelle, elle admet donc une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.[3] Notons F_1 une primitive sur $]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a $x^2 \in]0,1[$ et ainsi $g(x) = F_1(x^2) - F_1(x)$ est bien définie sur $]0,1[$. De la même façon, en notant F_2 une primitive sur $]1,+\infty[$. Pour tout $x \in]1,\infty[$, on a $x^2 \in]1,\infty[$ et ainsi $g(x) = F_2(x^2) - F_2(x)$ est bien définie sur $]1,\infty[$.

   (b) Nous reprenons les notations de la question 1. Pour tout $x \in]0,1[$, $x^2 < x$ ainsi $g(x) = -\int_{x^2}^{x} f(t)dt$, où les bornes d'intégration sont ordonnées dans le sens croissant. Maintenant pour $x \in]0,1[$, $[x^2, x] \subset]0,1[$ or pour $t \in]0,1[$, $f(t) < 0$. Ainsi $g(x) > 0$ sur $]0,1[$.
   Pour $x > 1$, on a $x^2 > x$ et les bornes sont déjà bien ordonées. De plus $\frac{1}{\ln(t)} > 0$ pour tout $t > 1$ et on a bien $g(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$.

   (c) Nous reprenons les notations de la question 1. Par définition on a $g(x) = F_1(x^2) - F_1(x)$ pour $0 < x < 1$ et $g(x) = F_2(x^2) - F_2(x)$ pour $x > 1$. Or par définition d'une primitive les fonctions F_1, F_2 sont dérivables sur leur ensemble de définition. Donc g est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables.
   On a pour tout $x < 1$: $g'(x) = 2xF_1'(x^2) - F_1'(x)$. Or $F_1'(x) = f(x)$ et donc $g'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}$, en simplifiant et factorisant on obtient :
   $$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$
   Les calculs sont identiques sur $]1,+\infty[$.

3. Il faut faire attention ici que l'intervalle définie par les bornes de l'intégrale ne contiennent pas des points où f n'est pas définie.

(d) La fonction g' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$ comme quotient de fonction $\mathcal{C}^\infty$. Ainisi g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.

(e) On a vu que pour tout $x \in \mathcal{D}_g$ on a

$$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

On obtient le tableau de signe/variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

2. Etude au voisinage de 0.

(a) Soit $x \in]0,1[$, alors comme on l'a vu précédemment $g(x) = -\int_{x^2}^{x} f(t)dt$ où les bornes de l'intégrales sont bien ordonnées. Par ailleurs pour tout $t \in [x^2, x]$ on a $\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ par croissance du logarithme. Et donc

$$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

par décroissance de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur R_-^*
Par croissance de l'intégrale on obtient alors :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)} dt$$

Remarquons que le membre le plus à gauche et le plus à droite sont des fonctions constantes vis-à-vis de t. Ainsi leur intégrale ce calcule immédiatement, on obtient

$$(x-x^2)\frac{1}{\ln(x)} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq (x-x^2)\frac{1}{\ln(x^2)}$$

Le terme du milieu correspond à $-g(x)$ et on a donc après multiplication par -1 qui inverse le sens des inégalités ont obtient :

$$(x^2-x)\frac{1}{\ln(x^2)} \leq g(x) \leq (x^2-x)\frac{1}{\ln(x)}$$

c'est-à-dire en factorisant :

$$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$

(b) Par calcul usuel sur les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{x)}{\ln(x)} = 0$ ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{\ln(x)} = 0$$

Le théorème des gendarmes assure que g admet une limite en 0 et

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

g est donc prolongeable par continuité en posant $g(0) = 0$

(c) On calcule le taux d'accroissement en 0 : $\tau_{g,x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)}{x}$ Ainsi pour tout $x \in]0,1[$:

$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leq \tau_{g,x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1)}{\ln(x)} = 0$, de nouveau d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{x\to 0} \tau_{g,x} = 0$ et ainsi g est dérivable en 0 et on a $g'(0) = 0$.

3. Au voisinage de 1.

(a) On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $h(x) = \ln(x) - x$ sur l'intervalle $[t,1]$ (ou $[1,t]$ selon l'ordre de 1 par rapport à x). h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $[t,1]$. h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $]t,1[$. Ainsi, il existe $c \in]t,1[$ tel que

$$\frac{h(t)-h(1)}{t-1} = h'(c)$$

Pour tout $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$, on a donc

$$\frac{\ln(t)-t+1}{t-1} = \frac{1-c}{c}$$

Pour tout $t < 1$ et tout $c \in]t,1[$ on a $t < c < 1$ donc $1-t > 1-c > 0$ et $\frac{1}{t} > \frac{1}{c} > 1$ d'où

$$\frac{1-t}{t} > \frac{1-c}{c} > 0$$

En particulier on a

$$0 \leq \frac{\ln(t)-t+1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$

(b) Comme pour tout $t \in]0,1[$, $-\frac{1-t}{t} < 0$ on a donc

$$-\frac{1-t}{t} \leq \frac{\ln(t)-t+1}{t-1} \leq \frac{1-t}{t}$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{\ln(t)-t+1}{t-1}\right| \leq \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(c) Le début du raisonnement est similaire et on obtient qu'il existe $c \in [1,t]$ tel que

$$\frac{\ln(t)-t+1}{t-1} = \frac{1-c}{c}$$

Remarquons que $a : t \mapsto \frac{1-t}{t}$ est une fonction décroissante sur $]1,+\infty[$ donc pour tout $t > 1$ et tout $c \in]1,t[$ on a

$$a(t) \leq a(c) \leq a(c)$$

ainsi :

$$\frac{1-t}{t} \leq \frac{1-c}{c} \leq 0 \leq -\frac{1-t}{t}$$

où la dernière inégalité provient du signe de $\frac{1-t}{t}$ sur $]1,+\infty[$. On a donc :

$$\left|\frac{\ln(t)-t+1}{t-1}\right| \leq -\frac{1-t}{t} = \left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

(d)

$$\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}=\frac{t-1-\ln(t)}{\ln(t)(t-1)}$$

donc

$$\left|\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}\right|=\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)}\right|$$

et donc

$$\left|\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}\right|\leq\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|.$$

Or $\lim_{t\to1}\frac{|1-t|}{|\ln(t)|}=1$ grâce à l'équivalent $\ln(t+1)\sim_0 t$ Donc $\lim_{t\to1}\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|=1$ Ainsi d'après la définition de la limite en 1, pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in[1-\eta,1+\eta]$ on a

$$\left|\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|-1\right|\leq\epsilon$$

En particulier, en prenant $\epsilon=1$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in[1-\eta,1+\eta]$ on a $\left|\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|-1\right|\leq 1$ Ce qui donne notamment :

$$\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|-1\leq 1$$

et enfin

$$\frac{1}{|\ln(t)|}\left|\frac{1-t}{t}\right|\leq 2$$

Avec l'inégalité obtenue précédemment on obtient bien qu'il existe $\eta>0$ tel que pour tout $t\in[1-\eta,1+\eta]$:

$$\left|\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}\right|\leq 2$$

(e) Regardons donc $u(x)=g(x)-\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt$ on obtient

$$\begin{aligned}
u(x)&=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}dt \quad \text{par linéarité, d'où}\\
|u(x)|&=\left|\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}dt\right|\\
|u(x)|&\leq\int_{[x,x^2]}\left|\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}\right|dt \quad Enutilisantl'ingalittriangulaire
\end{aligned}$$

Remarquons ici que $\int_{[x,x^2]}$ signifie que l'on intégre sur $[x,x^2]$ ou $[x^2,x]$ selon l'ordre des bornes. On peut sinon faire une disjonction de cas, avec $x>1$ ou $x<1$.
On a donc pour $x,x^2\in[1-\eta,1+\eta]$

$$|u(x)|\leq\int_{[x,x^2]}2dt=2|x^2-x|$$

Or quand $x\to1$, on a bien $x,x^2\in[1-\eta,1+\eta]$ donc l'inégalité est vraie pour x suffisamment proche de 1. Or $\lim_{x\to1}|x^2-x|=0$ donc le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{x\to1}|u(x)|=0$$

Or $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = [\ln(t)]_x^{x^2} = \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(2)$ Ce qui donne avec la limite de $|u(x)|$, $\lim_{x\to 1} |g(x) - \ln(2)| = 0$ c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \ln(2)$$

Ainsi g est prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1) = \ln(2)$

4. Au voisinage de $+\infty$.
   (a) On suit le même raisonnement que pour la question 2(a) : pour $x > 1$ et pour $t \in [x, x^2]$ on a

   $$\frac{1}{\ln(x^2)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

   par décroissance de la fonction f. Par positivité de l'intégrale on a donc :

   $$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

   et ainsi $\frac{x^2-x}{\ln(x^2)} \leq g(x)$ d'où

   $$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x)$$

   (b) Par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = +\infty$ et donc d'après le théorème de comparaison on a :

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$