DS7

3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Calculer la limite de la somme suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$$

Correction 1. On souhaite étudier la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}.$$

Cela ressemble à une somme de Riemann. On commence par normaliser l'expression en mettant $\frac{k}{n}$ en évidence. Pour cela, on factorise par n^2 dans le dénominateur :

$$\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{n}{n^2\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}.$$

On reconnaît maintenant une somme de Riemann pour la fonction $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ <u>continue</u> sur l'intervalle $[0,1]$. On obtient donc :

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Or :

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=[\arctan(x)]_0^1=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2. Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

— $F_u=(u_1,u_2)$ avec $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(2,1,2)$.

— $F_v=(v_1,v_2,v_3)$ avec $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(2,1,2)$, $v_3=(1,2,2)$.

— $F_w=(w_1,w_2,w_3,w_4)$ avec $w_1=(1,1,1)$, $w_2=(2,1,2)$, $w_3=(1,2,2)$, $w_4=(1,0,0)$.

Correction 2.

1. F_u n'est pas génératrice car $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que F_u ne possède que 2 vecteurs. En revanche F_u est libre, car les deux vecteurs ne sont pas proportionels (ceci ne marche que pour deux vecteurs)
2. Cherchons à savoir si F_v est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ tel que $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0$. On obtient les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll}1\lambda_1+2\lambda_2+1\lambda_3 & =0\\ 1\lambda_1+1\lambda_2+2\lambda_3 & =0\\ 1\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3 & =0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{llll}\lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & =0\\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & =0\\ & & \lambda_3 & =0\end{array}\right.$$

Le système est échelonné et il est de Cramer, il possède donc une unique solution $(0,0,0)$. La famille F_v est donc libre. Elle est de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base, en particulier elle est génératrice

3. La famille F_w possède 4 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3 elle n'est donc pas libre. En revanche, comme elle contient la sous-famille F_v elle est génératrice.

Exercice 3. On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\,(u_1 = (1, 3, 0, 2), u_2 = (2, 7, -3, 6), u_3 = (1, 1, 6, -2))$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathcal{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer une représentation cartésienne de F
4. Montrer que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
5. (a) On considère la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ et de $\mathcal{B}_F$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
   (b) Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et en déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F})$
6. Soit $G = \{u+v \mid u \in E, v \in F\}$, montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

Correction 3.

1. (a) On résout le système définissant les éléments de E :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 & = x_2 + x_3 \\ x_4 & = -2x_3 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} E &= \{(x_2 + x_3, x_2, x_3, -2x_3) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_2(1, 1, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, -2) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2)) \end{aligned}$$

Ainsi E est un sev de $\mathbb{R}^4$ et $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2))$ en est une famille génératrice.

   (b) Comme la famille $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -2))$ est libre, (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) cette famille est une base de E.

$$\boxed{E \text{ est de dimension } 2}$$

2. Calculons le rang de (u_1, u_2, u_3), en calculant le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

On a

$$rg((u_1, u_2, u_3)) = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi

$$\boxed{\dim(F) = 2}$$

De plus, les vecteurs (u_1, u_2) forment une famille libre : ce sont deux vecteurs non colinéaires, comme $\mathrm{Card}(u_1, u_2) = 2 = \dim(F)$ cette famille est donc une base de F.

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F}$$

3. Comme (u_1, u_2) est une base de F, on a $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, u = \lambda u_1 + \mu u_2$
Pour obtenir une représentation cartésienne de F, on résout ensuite le système d'inconnue (λ, μ) et de paramètre (x_1, x_2, x_3, x_4). On obtient

$$\left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ 3\lambda & +7\mu & = & x_2 \\ & -3\mu & = & x_3 \\ 2\lambda & +6\mu & = & x_4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ & \mu & = & x_2 - 3x_1 \\ & -3\mu & = & x_3 \\ & +2\mu & = & x_4 - 2x_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrcl} \lambda & +2\mu & = & x_1 \\ & \mu & = & x_2 - 3x_1 \\ & 0 & = & x_3 + 3(x_2 - 3x_1) \\ & 0 & = & x_4 - 2x_1 - 2(x_2 - 3x_1) \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont les équations de compatibilités du système, on a donc

$$\boxed{F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}}$$

4. D'après ce qui précède :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \cap F \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ -9x_1 + 3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ 2x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 0 \\ & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ & 4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -x_1 + x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -6x_2 & -8x_3 & & = 0 \\ & 4x_3 & +3x_4 & = 0 \\ & 0 & 5x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 4 à 4 inconnues, il admet donc une unique solution. Comme il est homogéne, cette solution est $(0, 0, 0, 0)$. Ainsi

$$\boxed{E \cap F = \{(0,0,0,0)\}}$$

5. (a) Avec nos choix de $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ on obtient

$$\mathcal{F} = ((1,1,0,0),(1,0,1,-2),(1,3,0,2),(2,7,-3,6))$$

Pour montrer que cette famille est libre on peut soit faire la méthode "habituelle" soit procéder de la façon suivante.
On note $v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,0,1,-2)$ et l'énoncé note $u_1 = (1,3,0,2), u_2 = (2,7,-3,6)$.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = O_{\mathbb{R}^4}$$

On obtient alors

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = -(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2)$$

Or comme E et F sont des sev de $\mathbb{R}^4$ on a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F$ et $-(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) \in E$ Mais comme ces deux vecteurs sont égaux on a donc

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F \cap E \quad \text{et} \quad -(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) \in E \cap F$$

Ainsi

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = O_{\mathbb{R}^4} \quad \text{et} \quad -(\lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2) = O_{\mathbb{R}^4}$$

Mais comme (v_1, v_2) et (u_1, u_2) sont des familles libres, on a alors :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi la famille } \mathcal{F} \text{ est libre}}$$

(b) $\mathcal{F}$ est une famille libre et de plus $Card(\mathcal{F}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^4}$$

6. Il faut résoudre le système

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = (2,3,1,2)$$

On obtient

$$
\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
\lambda_1 & & +3\lambda_3 & +7\lambda_4 & = 3 \\
 & \lambda_2 & & -3\lambda_4 & = 1 \\
 & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 & = 2
\end{cases}
$$

$$
\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}
\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & = 1 \\
 & \lambda_2 & & -3\lambda_4 & = 1 \\
 & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & +6\lambda_4 & = 2
\end{cases}
$$

$$
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 ; L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}{\iff}
\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & = 1 \\
 & & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & & -2\lambda_3 & -4\lambda_4 & = 0
\end{cases}
$$

$$
\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\iff}
\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & = 1 \\
 & & +2\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & & & -2\lambda_4 & = 2
\end{cases}
$$

$$
\underset{L_4 \leftarrow L_4/(-2)}{\iff}
\begin{cases}
\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 2 \\
 & -\lambda_2 & +2\lambda_3 & +5\lambda_4 & = 1 \\
 & & \lambda_3 & & = 2 \\
 & & & \lambda_4 & = -1
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
\lambda_1 & -2 & +2 & -2 & = 2 \\
 & \lambda_2 & & & = -2 \\
 & & \lambda_3 & & = 2 \\
 & & & \lambda_4 & = -1
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
\lambda_1 & & & & = 4 \\
 & \lambda_2 & & & = -2 \\
 & & \lambda_3 & & = 2 \\
 & & & \lambda_4 & = -1
\end{cases}
$$

Ainsi la matrice de coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$ est

$$
M_{\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

7. Comme $0_{\mathbb{R}^4} \in E$ et $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ donc $0_{\mathbb{R}^4} + 0_{\mathbb{R}^4} = 0_{\mathbb{R}^4} \in G$. Ainsi G est non vide.
   Soit $(x_1, x_2) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $x_i \in G$ on a $x_1 = e_1 + f_1$ et $x_2 = e_2 + f_2$ où $e_i \in E$ et $f_i \in F$ Ainsi

$$
\begin{aligned}
x_1 + \lambda x_2 &= e_1 + f_1 + \lambda(e_2 + f_2) \\
&= e_1 + \lambda e_2 + (f_1 + \lambda f_2)
\end{aligned}
$$

   Comme E et F sont des sev, $e_1 + \lambda e_2 \in E$ et $f_1 + \lambda f_2 \in F$. Ainsi

$$
x_1 + \lambda x_2 \in G
$$

$$
\boxed{G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^4}
$$

8.

$$
u_1 = u_1 + 0_{\mathbb{R}^4}, u_2 = u_2 + 0_{\mathbb{R}^4}, v_1 = 0_{\mathbb{R}^4} + v_1, v_2 = 0_{\mathbb{R}^4} + v_2
$$

Donc

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in G$$

Ainsi

$$\text{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset G$$

Comme (u_1, u_2, v_1, v_2) est une famille libre,

$$\dim \text{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) = 4$$

Ainsi

$$4 \leq \dim(G)$$

Or $G \subset \mathbb{R}^4$ donc $\dim(G) \leq 4$ ainsi

$$\boxed{\dim(G) = 4 \text{ et } G = \mathbb{R}^4 \text{ et}}$$

Exercice 4. On cherche à démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

I. Preuve de la convergence

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n(n!)}$

1. Etudier la monotonie des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   II. Représentation intégrale
3. On note $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n$$

   (On rappelle que par convention $0! = 1$)

   III. Conclusion
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq I_n \leq e$$

6. Conclure

Correction 4.

I. Preuve de la convergence

1. **Monotonie des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

   On a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

   Donc $S_{n+1} \geq S_n$.

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

De même :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} \end{aligned}$$

Pour mettre au même dénominateur on regarde les termes en commun dans ces trois fractions. On voit qu'il suffit de mettre en facteur $n(n+1)((n+1)!)$. On obtient :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{n^2 + n + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

2. **Suites adjacentes**
On a montré que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant. Enfin $T_n - S_n = \frac{1}{n(n!)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
On en déduit que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Le théorème sur les suites adjacentes assure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite. En particulier

$$\boxed{\text{La suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

II. Représentation intégrale

3. **Relation de récurrence pour I_n**
On intègre par parties, en posant :

$$u(t) = (1-t)^{n+1}, \quad v'(t) = e^t \Rightarrow u'(t) = -(n+1)(1-t)^n, \quad v(t) = e^t$$

On a donc :

$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t\, dt &= [(1-t)^{n+1} e^t]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt \\ &= (0-1) + (n+1)I_n = -1 + (n+1)I_n \end{aligned}$$

4. **Formule donnant e**
On procède par récurrence sur n.
Soit $P(n) =$ "$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n$"

<u>Initialisation</u> Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + \frac{1}{0!} I_0 = 1 + I_0$$

Or $I_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$, donc :

$$1 + (e-1) = e$$

L'égalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité Supposons la propriété vraie au rang n :

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}(-1 + (n+1)I_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} I_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{n+1}{n!} I_n) \\
&= e \quad \text{Par HR}
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété P est vraie au rang $n+1$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 0,\ e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n}$$

5. **Encadrement de I_n**
   On a :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq (1-t)^n \leq 1, \quad 1 \leq e^t \leq e$$

   Ainsi

$$0 \leq (1-t)^n e^t \leq e$$

   donc par positivité de l'intégrale

$$\boxed{0 \leq I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e dt = e}$$

6. **Conclusion**
   On a :

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} I_n$$

   avec $0 \leq I_n \leq e$, donc :

$$-\frac{e}{n!} + e \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e$$

   Or $\frac{e}{n!} \to 0$ quand $n \to \infty$, donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e}$$

Informatique

Exercice 5. On considère deux urnes U et V. L'urne U contient 20 jetons rouges et 40 jetons noirs. L'urne V contient 30 jetons rouges et 30 jetons noirs. On effectue une succession de tirages avec remise dans ces deux urnes selon le protocole suivant :

— On choisit une urne au hasard au départ et on tire un jeton.

— A chaque fois que l'on tire un jeton rouge, on change d'urne pour effectuer le tirage suivant. En revanche, si on tire un jeton noir, on reste dans la même urne pour le tirage suivant.

On cherche à modéliser cette expérience à l'aide de fonctions Python. On représentera une urne par une liste contenant des chaine de caractères 'R' et 'N' pour rouge et noire.

Par exemple la liste `['R','N','N','N']` représente une urne avec 1 boule rouge et 3 boules noires

1. Quelle bibliothèque Python permet de simuler des expériences aléatoires ?
2. Ecrire un script qui permet de créer deux listes `UrneU` et `UrneV` constituées des caractères : `'R'` et `'N'` représentant les deux compositions d'urnes.
3. Définir une fonction `tirage(L)` prenant comme argument une liste `L` et retourne au hasard un élément de cette liste.
4. Définir une fonction `tirage_Urne(nom)` prenant comme argument une chaîne de caractères `nom` simulant un tirage dans l'urne U si `nom=='U'` et dans V si `nom=='V'`. Si `nom` est différent de `'U'` ou `'V'`, le programme renverra un message d'erreur.
5. Compléter (en recopiant sur votre copie) le script suivant, de sorte qu'il renvoie la liste des n premiers résultats de tirages effectués selon la règle donnée précédemment.

```python
def experience(n):
    #Premier tirage
    p=......... #choix aléatoire de la première urne
    if p==0:
        urne='U'
    else:
        urne='V'
    resultat=tirag_Urne(urne)
    liste=[resultat]

    #Autres tirages
    for i in range(n-1):
        # On change d'urne si on a pioché une rouge :
        if resultat=='R':
            if urne='V'
                urne=....
            else:
                urne=....
        #on pioche au hasard dans l'urne
        resultat=.....
        liste=.......
    return liste
```

Correction 5.

1. (a) C'est la bibliothèque `random`, souvent importée de la manière suivante :

`import random as rd`

(b)
```
UrneU=['R']*20+['N']*40
UrneV=['R']*30+['N']*30
```

(c)
```
def tirage(L):
    n=rd.randint(0,len(L)-1)
    return(L[n])
```

(d)
```
def tirage_U(nom):
    if nom=="U":
        return(tirage(UrneU))
    elif nom=="V":
        return(tirage(UrneV))
    else:
        return 'erreur de nom'
```

(e)
```
def experience(n):
    p=rd.randint(0,1)
    if p==0:
        urne='U'
    else:
        urne='V'
    resultat=tirage_U(urne)
    liste=[resultat]
    for i in range(n-1):
        if resultat=='N':
            resultat=tirage_U(urne)
        else:
            if urne='V'
                urne='U'
            else:
                urne='V'
            resultat=tirage_U(urne)
        liste=liste.append(resultat)
    return liste
```

Tournez SVP

Exercice 6. Dans le cadre d'une étude sur la biodiversité et l'impact des changements climatiques sur les populations animales, un projet de recherche mené par une équipe de biologistes a enregistré dans une base de données la répartition des espèces animales dans différents habitats. Cette base de données contient les trois tables suivantes :

— **Especes** (id_esp, nom, famille, id_hab)
— **Observations** (id_obs, année, id_esp, lieu, nombre_individus)
— **Habitats** (id_hab, nom, type, region)

Elle est conçue pour stocker et gérer des informations sur les espèces animales observées dans différents habitats.

— **Especes** (`id_esp`, `nom`, `famille`, `id_hab`) : Cette table recense les espèces animales, identifiées par un identifiant unique (`id_esp`). Elle contient le `nom` scientifique de l'espèce, sa `famille` biologique et un identifiant (`id_hab`) faisant référence à son habitat principal. *Exemple : (1, "Panthera leo", "Felidae", 3)*
— **Observations** (`id_obs`, `date`, `id_esp`, `lieu`, `nombre_individus`) : Cette table enregistre les observations d'espèces effectuées sur le terrain. Chaque observation est identifiée par `id_obs`, associée à une `année`, une espèce observée (`id_esp`), un `lieu` précis et le `nombre_individus` comptés. *Exemple : (101, "2024", 1, "Parc Kruger", 5)*
— **Habitats** (`id_hab`, `nom`, `type`, `region`) : Cette table décrit les habitats naturels des espèces. Chaque habitat a un identifiant unique (`id_hab`), un `nom`, un `type` (forêt, savane, zone humide, etc.) et une `region` géographique. *Exemple : (3, "Savane africaine", "Savane", "Afrique de l'Est")*

Questions :

1. Sélectionnez le nom de toutes les espèces de cette base de données.
2. Sélectionnez le lieu de toutes les observations faites en 2024.
3. Sélectionnez la famille des espèces vivant dans un habitat de type "récif corallien".
4. Affichez le nom de l'habitat qui contient le plus d'espèces.
5. Trouvez les observations faites après l'année 2020 et affichez le lieu de l'observation ainsi que le nom de l'espèce observée et le nom de l'habitat correspondant.
6. Affichez le nombre total d'observations par espèce, trié par ordre décroissant. (on affichera le nom de l'espèce et le nombre total d'observations pour chaque espèce)
7. Sélectionnez les espèces ayant été observées au moins 10 fois.

Correction 6.

1.
```sql
SELECT  nom
FROM Especes
```

2.
```sql
SELECT lieu
FROM Observations
WHERE année = 2024
```

3.
```sql
SELECT famille
FROM Especes JOIN Habitats
ON Especes.id_hab = Habitats.id_hab
WHERE Habitats.nom = 'récif corallien'
```

4.
```sql
SELECT MAX(COUNT(especes.nom)), Habitats.nom
FROM Especes JOIN Habitats
ON Especes.id_hab = Habitats.id_hab
GROUP BY Habitats.nom
```

5.
```
SELECT Especes.nom, Observations.lieu, Habitats.nom
FROM Especes JOIN Observations  JOIN Habitas
ON Especes.id_esp = Observations.id_esp
AND Especes.id_hab = Habitats.id_hab
WHERE Observations.année >2020
```

6.
```
SELECT Especes.nom, Count(*) as Tot
FROM Especes JOIN Observations
ON Especes.id_esp = Observations.id_esp
GROUP BY  Especes.nom
ORDER BY Tot DESC
```

7.
```
SELECT Especes.nom, Count(*)
FROM Especes JOIN Observations
ON Especes.id_esp = Observations.id_esp
GROUP BY  Especes.nom
HAVING COUNT(*) >10
```

ou sans HAVING

```
SELECT Nom, Tot FROM
(SELECT Especes.nom as Nom, Count(*)  as Tot
FROM Especes JOIN Observations
ON Especes.id_esp = Observations.id_esp
GROUP BY  Especes.nom)
WHERE Tot >10
```