Concours Blanc - Epreuve de mathématiques

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on appelle commutant de A et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AB = BA\}$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de $\mathcal{C}(A)$.

1. On admet que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. On suppose dans cette question qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Déterminer alors $\mathcal{C}(A)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}(A)$.
3. Soit P une matrice inversible. On note $N = P^{-1}AP$ Montrer que
$$B \in \mathcal{C}(A) \iff PBP^{-1} \in \mathcal{C}(N)$$
4. Montrer que si A est inversible $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1})$
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{C}(A)$.

Premier exemple On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$
7. On admet que pour cette matrice A, $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 2. En déterminer une base.

Second exemple On note

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note aussi

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
9. Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier que l'on a $P^{-1}AP = N$.

10. Déterminer une base de $\mathcal{C}(N)$. (On pourra résoudre un système 9×9 (!))
11. On admet que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(N)$ on même dimension. En déduire une base de $\mathcal{C}(A)$ (on ne demande pas de calculer explicitement les termes des matrices)

Correction 1.

1. On montre que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Tout d'abord, $O_n \in \mathcal{C}(A)$ car
$$AO_n = O_n = O_nA.$$
Soient $B, C \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} A(B+\lambda C) &= AB + \lambda AC && \text{par distributivité} \\ &= BA + \lambda CA && \text{car } B, C \in \mathcal{C}(A) \\ &= (B+\lambda C)A. && \text{par distributivité} \end{aligned}$$
Donc $B + \lambda C \in \mathcal{C}(A)$.

$$\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.
   Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors
   $$AB = (\lambda I_n)B = \lambda B \quad \text{et} \quad BA = B(\lambda I_n) = \lambda B.$$
   Ainsi $AB = BA$, donc $B \in \mathcal{C}(A)$.
   $$\boxed{\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(\mathcal{C}(A)) = n^2.}$$

3. Soit P une matrice inversible et $N = P^{-1}AP$.
   Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
   $$B \in \mathcal{C}(A) \iff AB = BA.$$
   Or, comme $A = PNP^{-1}$, on obtient
   $$\begin{aligned} AB = BA &\iff PNP^{-1}B = BPNP^{-1} && \text{car } A = PNP^{-1} \\ &\iff NP^{-1}BP = P^{-1}BPN && \text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P \\ &\iff P^{-1}BP \in \mathcal{C}(N). \end{aligned}$$
   Avec les notations de l'énoncé, l'égalité attendue est équivalente en remplaçant P par P^{-1}.
   $$\boxed{B \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}BP \in \mathcal{C}(N).}$$

4. Supposons que A soit inversible.
   Soit $B \in \mathcal{C}(A)$. Alors
   $$AB = BA.$$
   En multipliant à gauche et à droite par A^{-1}, on obtient
   $$BA^{-1} = A^{-1}B.$$
   Donc $B \in \mathcal{C}(A^{-1})$.
   Réciproquement, si $B \in \mathcal{C}(A^{-1})$, alors
   $$A^{-1}B = BA^{-1}.$$
   En multipliant à gauche et à droite par A, on obtient
   $$BA = AB.$$
   Donc $B \in \mathcal{C}(A)$.
   $$\boxed{\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1}).}$$

5. Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{C}(A)$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme les puissances d'une même matrice commutent entre elles,
   $$AA^k = A^{k+1} = A^kA.$$
   Donc $A^k \in \mathcal{C}(A)$.
   $$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ A^k \in \mathcal{C}(A).}$$

6. On a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Calculons A^2 :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$
On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$A^2 = \alpha A + \beta I_2.$$
Or
$$\alpha A + \beta I_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha + \beta \end{pmatrix}.$$
Donc
$$2\alpha = 10,$$
d'où $\alpha = 5$. Puis
$$\alpha + \beta = 7,$$
donc $\beta = 2$.
$$\boxed{A^2 = 5A + 2I_2.}$$

7. On sait que $I_2 \in \mathcal{C}(A)$ et $A \in \mathcal{C}(A)$. De plus, A n'est pas une matrice scalaire, donc la famille (I_2, A) est libre.
En effet, si $aI_2 + bA = O_2$, alors
$$aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a + b & 2b \\ 3b & a + 4b \end{pmatrix} = O_2.$$
On obtient $2b = 0$, donc $b = 0$, puis $a = 0$.
La famille (I_2, A) est donc une famille libre de $\mathcal{C}(A)$ de cardinal 2. Comme on admet que $\dim(\mathcal{C}(A)) = 2$, c'est une base.
$$\boxed{(I_2, A) \text{ est une base de } \mathcal{C}(A).}$$

8. Calculons PQ :
$$PQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc $PQ = I_3$.
$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = Q.}$$

9. Comme $P^{-1} = Q$, on calcule :
$$P^{-1}AP = QAP.$$
Or
$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N.$$
$$\boxed{P^{-1}AP = N.}$$

10. Soit
$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$
On cherche les matrices B telles que $BN = NB$.
On calcule
$$BN = \begin{pmatrix} a & a+b & 2c \\ d & d+e & 2f \\ g & g+h & 2i \end{pmatrix}$$
et
$$NB = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}.$$
Ainsi $BN = NB$ équivaut au système
$$d = 0, \qquad c = 0, \qquad f = 0, \qquad g = 0, \qquad h = 0, \qquad e = a.$$
Donc
$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\boxed{\text{Une base de } \mathcal{C}(N) \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).}$$

11. D'après la question précédente, une base de $\mathcal{C}(N)$ est donnée par
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Comme $N = P^{-1}AP$, on a
$$B \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}BP \in \mathcal{C}(N).$$
Ainsi les matrices de $\mathcal{C}(A)$ s'obtiennent en conjuguant les matrices de $\mathcal{C}(N)$ par P :
$$B \in \mathcal{C}(A) \iff B = PMP^{-1} \quad \text{avec } M \in \mathcal{C}(N).$$
Puisque $P^{-1} = Q$, une base de $\mathcal{C}(A)$ est donc
$$(PE_1Q,\ PE_2Q,\ PE_3Q)\,.$$
$$\boxed{(PE_1Q, PE_2Q, PE_3Q) \text{ est une base de } \mathcal{C}(A).}$$

Exercice 2. On considère la fonction
$$f : x \longmapsto \ln(1+x).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que l'intégrale
$$I = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$
est bien définie.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer exactement I.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$
Justifier que la suite (S_n) converge vers I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme
$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}.$$

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,
$$\ln(1+x) - P_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt.$$

6. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$,
$$|\ln(1+x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

7. Montrer que
$$P_n(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$
converge vers $\ln 2$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :
$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que :
$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres :

$$\binom{j-1}{k} \quad \text{et} \quad \binom{j}{k}.$$

(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

(c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\forall i \in [\![k, n]\!], \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
(b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k), \quad \text{puis que} \quad \mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Correction 2. Partie A

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(X_k = i) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_k) &= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \text{ est uniforme sur } [\![1, n]\!] \text{ et } \mathbb{E}(X_k) = \tfrac{n+1}{2}.}$$

2. (a) Soit $\omega \in \Omega$. On a

$$S_k(\omega) \geq k,$$

donc nécessairement $T_n(\omega) \leq n$. De plus $T_n \geq 1$.
Ainsi

$$T_n(\Omega) = [\![1, n]\!].$$

$$\boxed{T_n \text{ prend ses valeurs dans } [\![1, n]\!].}$$

(b)

$$T_n = 1 \iff X_1 \geq n \iff X_1 = n.$$

Donc

$$P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n}.$$

$$\boxed{P(T_n = 1) = \tfrac{1}{n}.}$$

(c) On a

$$T_n = n \iff S_{n-1} \leq n-1 \text{ et } S_n \geq n.$$

Or la seule possibilité est

$$X_1 = \cdots = X_n = 1.$$

Par indépendance des (X_k) :

$$P(T_n = n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\boxed{P(T_n = n) = \left(\tfrac{1}{n}\right)^n.}$$

3. On suppose $n = 2$. On a $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

$$P(T_2 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

$$P(T_2 = 2) = 1 - P(T_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{T_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1, 2\}.}$$

4. On suppose $n = 3$.

$$P(T_3 = 1) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

Soit $(x_1, x_2) \in [\![1, 3]\!]^2$. On a

$$T_3 = 2 \iff x_1 < 3 \text{ et } x_1 + x_2 \geq 3.$$

On compte les cas favorables : $(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)$ soit 5 cas sur 9.

$$P(T_3 = 2) = \frac{5}{9}.$$

$$P(T_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{5}{9} = \frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_3) &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} \\
&= \frac{3}{9} + \frac{10}{9} + \frac{3}{9} \\
&= \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La loi de } T_3 \text{ est déterminée et } \mathbb{E}(T_3) = \tfrac{16}{9}.}$$

Partie B

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

Ainsi

$$\forall \omega \in \Omega, \quad k \leq S_k(\omega) \leq kn.$$

Donc

$$S_k(\Omega) = [\![k, kn]\!].$$

$$\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, kn]\!].}$$

6. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a
$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$
$$\boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}.}$$

(b) Soit $i \in [\![k+1, n]\!]$. Par la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j \cap X_{k+1} = i - j) \\ &= \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) P(X_{k+1} = i - j) \qquad \text{indépendance} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j). \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{La relation demandée est vérifiée.}}$$

7. (a) Pour tout $j, k \in \mathbb{N}^*$:
$$\binom{j}{k} = \binom{j-1}{k} + \binom{j-1}{k-1}.$$

(b) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \geq k+1$. Par sommation :
$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

(c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On démontre $\mathcal{H}_k$ par récurrence.
Initialisation ($k = 1$) :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(S_1 = i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\binom{i-1}{0}.$$

Hérédité : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{H}_k$ vraie. Alors
$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a
$$[T_n > k] \iff [S_k \leq n-1].$$
$$\boxed{[T_n > k] = [S_k \leq n-1].}$$

(b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors
$$\begin{aligned} P(T_n > k) &= \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.}$$

9. On utilise la formule générale valable pour toute variable entière positive :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T_n > k).$$

Ici,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n-1}.}$$

10.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(T_n) = e.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e.}$$