DS - Concours Blanc

3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1 (Agro 2023). [1] Soit λ est un réel strictement positif ; on considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto e^{\lambda(x-1)}$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

1. Déterminer le signe sur R^+ de la fonction $g : x \mapsto xe^{-x} - 1$.
2. Montrer que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$.
   Indication : on pourra dériver deux fois la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$.
3. Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ a exactement deux solutions sur $[0, 1]$.
   Indication : on pourra prouver que la dérivée de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ *s'annule en un seul point* α *sur* $[0, 1]$ *dont on ne cherchera pas l'expression.*

Exercice 2 (D'après Agro 2019). [2]

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $E_\lambda(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$E_\lambda(A) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\} \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De manière générale, pour un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on notera

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

la matrice correspondante.

1. On fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et un réel λ. Montrer que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. On fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ_1, λ_2. On suppose que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrer que
$$E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

On suppose dans la suite que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $c_1 = (1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ d'une part et $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (4, 2, 1)$ et $u_3 = (1, -1, 1)$ d'autre part.

Comme indiqué dans l'introduction, on note pour $i \in \{1, 3\}$:

$$C_i = c_i^t \quad \text{et} \quad U_i = u_i^t$$

où t indique la transposée. On a par exemple :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note P la matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs correspondant à U_1, U_2, U_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1]. Préliminaires du sujet recopiés tels quels.

[2]. Le sujet original diffère largement de ce sujet, le programme de deuxième année permet de simplifier beaucoup de questions intermédiaires.

3. (a) Montrer que $u_1 \in E_1(A)$.
   (b) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 \in E_\lambda(A)$.
   (c) Montrer que (u_3) est une base de $E_{-1}(A)$.
4. (a) Montrer que $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire que P est inversible. *On ne demande pas de calculer l'inverse*
   (c) Justifier enfin que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a
$$P^{-1}U_i = C_i$$
5. (a) Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que
$$MC_1 = C_1 \quad MC_2 = 2C_2 \quad \text{et} \quad MC_3 = -C_3$$
   (b) En déduire que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Agro 2022)**.** [3] Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.

On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i, on pourra noter N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.
4. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
5. Justifier (succinctement) que
$$P_{N_1=i}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k - 1)$$
6. En déduire que pour tout $k \geq 2$, on a :
$$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k - 1).$$
7. Montrer alors que pour tout $k \geq 2$:
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} P(X_n = k - 1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k)$$
8. En déduire que $E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}$.
9. En déduire une expression de $E(X_n)$ sous forme d'une somme.
10. (a) Prouver que pour tout entier $k \geq 2$, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt.$$
   On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

[3]. Les questions 5, 7, 10.b 11, 12 et 14 ont été ajoutées au sujet original afin de le rendre plus accessible au niveau sup

(b) Déterminer à l'aide des inégalités précédentes deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\ln(n+1) + A \leq H_n \leq \ln(n) + B$$

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

(d) En déduire un équivalent de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

11. Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + \frac{2}{n+1} E(X_n) + \frac{1}{n+1}.$$

12. En déduire que

$$V(X_{n+1}) = V(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

13. En déduire une expression de $V(X_n)$ sous forme de somme.

14. On admet qu'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq C$$

En déduire un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.