

Concours Blanc - Epreuve de mathématiques

Durée 2h15

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené-e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on appelle commutant de A et on note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de $\mathcal{C}(A)$.

1. On admet que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. On suppose dans cette question qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$. Déterminer alors $\mathcal{C}(A)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}(A)$.
3. Soit P une matrice inversible. On note $N = P^{-1}AP$ Montrer que

$$B \in \mathcal{C}(A) \iff P^{-1}BP \in \mathcal{C}(N)$$

Premier exemple On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$
5. On admet que pour cette matrice A , $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 2. En déterminer une base.

Second exemple On note

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note aussi

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que P est inversible et donner son inverse.
7. Calculer $P^{-1}AP$ et vérifier que l'on a $P^{-1}AP = N$.
8. Déterminer une base de $\mathcal{C}(N)$. (On pourra résoudre un système 9×9 (!))
9. On admet que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(N)$ ont même dimension. En déduire une base de $\mathcal{C}(A)$ (on ne demande pas de calculer explicitement les termes des matrices)

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \ln(1 + x).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Justifier que l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln(1 + x) dx$$

est bien définie.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer exactement I .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n}.$$

4. Rappeler la formule simplifiée de $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n (-x)^k$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Exprimer Q_n en fonction de P_n

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$\ln(1+x) - P_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

7. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|\ln(1+x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

8. En déduire la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

(b) Calculer $P(T_n = 1)$.

(c) Montrer que :

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

On se replace dans le cas général, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
- Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .
 - En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres :

$$\binom{j-1}{k}, \binom{j-1}{k-1} \quad \text{et} \quad \binom{j}{k}.$$

- (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

Indications : On pourra faire une récurrence ou une somme télescopique...

- (c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{H}_k la proposition :

$$\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie.

8. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
- (b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k), \quad \text{puis que} \quad \mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.