Correction Concours Blanc

Exercice 1 (Agro 2023). [1] Soit λ est un réel strictement positif ; on considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto e^{\lambda(x-1)}$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $[0,1]$.

1. Déterminer le signe sur R^+ de la fonction $g : x \mapsto xe^{-x} - 1$.
2. Montrer que, si $\lambda \leq 1$, alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0,1]$.
   Indication : on pourra dériver deux fois la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$.
3. Montrer que, si $\lambda > 1$, alors l'équation $f(x) = x$ a exactement deux solutions sur $[0,1]$.
   Indication : on pourra prouver que la dérivée de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ s'annule en un seul point α sur $[0,1]$ dont on ne cherchera pas l'expression.

Correction 1.

1. Étudions le signe de $g(x)$ sur R^+. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$g'(x) = e^{-x}(1-x)$$

Étudions le signe de $g(x)$ sur R^+. La fonction g est définie et dérivable sur R^+ et :

$$g'(x) = e^{-x}(1-x)$$

et $g'(x) > 0 \iff x < 1$;
On obtient le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e} - 1$	$\searrow$	$-\infty$

Or

$$g(1) = 1 \cdot e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq \frac{1}{e} - 1 < 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) < 0}$$

2. On définit $\varphi(x) = f(x) - x = e^{\lambda(x-1)} - x$.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0,1]$ et on a :

$$\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0$$

On a alors

$$\varphi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 = g(\lambda)$$

Donc en particulier $\varphi'(0) < 0$. Et $\varphi'(1) = \lambda - 1 < 0$ (par hypothèse sur λ.)

[1]. Préliminaires du sujet recopiés tels quels.

x	0		1
$\varphi''(x)$		$+$	
φ'	$g(\lambda)$	$\nearrow$	$\lambda - 1$
φ'		$-$	
φ	$e^{-\lambda}$	$\searrow$	0

Ainsi $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$, à savoir $x = 1$.

3. Dans le tableau de variations précédent ce qui change est le signe de $\varphi'(1) = \lambda - 1$
En utilisant le théorème de la bijection appliqué à φ' (continue et strictement croissante), il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\varphi'(\alpha) = 0$ On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		α		1
$\varphi''(x)$			$+$		
φ'	$g(\lambda)$	$\nearrow$	α	$\rightarrow$	$\lambda - 1$
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$e^{-\lambda}$	$\searrow$	$\varphi(\alpha)$	$\nearrow$	$\varphi(1) = 0$

$\varphi(0) = e^{-\lambda}$
Il nous reste à déterminer le signe de $\varphi(\alpha)$
On sait que $\varphi'(\alpha) = 0$ c'est à dire :

$$\lambda e^{\lambda(\alpha-1)} = 1$$

Et donc $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = e^{\lambda(\alpha-1)} - \alpha = \frac{1}{\lambda} - \alpha$
Remarquons que

$$\lambda e^{\lambda(\alpha-1)} = 1 \iff \alpha = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda) + 1$$

et donc

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\ln(\lambda) - 1$$

Pour finir il reste à déterminer le signe de cette expression. On a

Exercice 2 (D'après Agro 2019). [2]

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $E_\lambda(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$E_\lambda(A) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\} \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De manière générale, pour un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ on notera

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

la matrice correspondante.

1. On fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et un réel λ. Montrer que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. On fixe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et deux réels λ_1, λ_2. On suppose que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Montrer que

$$E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

On suppose dans la suite que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $c_1 = (1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ d'une part et $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (4, 2, 1)$ et $u_3 = (1, -1, 1)$ d'autre part.

Comme indiqué dans l'introduction, on note pour $i \in \{1, 3\}$:

$$C_i = c_i^t \quad \text{et} \quad U_i = u_i^t$$

où t indique la transposée. On a par exemple :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note P la matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs correspondant à U_1, U_2, U_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Montrer que $u_1 \in E_1(A)$.
   (b) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 \in E_\lambda(A)$.
   (c) Montrer que (u_3) est une base de $E_{-1}(A)$.
4. (a) Montrer que $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire que P est inversible. *On ne demande pas de calculer l'inverse*
   (c) Justifier enfin que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a

$$P^{-1} U_i = C_i$$

[2]. Le sujet original diffère largement de ce sujet, le programme de deuxième année permet de simplifier beaucoup de questions intermédiaires.

5. (a) Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que

$$MC_1 = C_1 \quad MC_2 = 2C_2 \quad \text{et} \quad MC_3 = -C_3$$

(b) En déduire que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction 2.

1. $E_\lambda(A) \subset \mathbb{R}^n$ par définition. De plus, $(0, \dots, 0) \in E_\lambda(A)$ car

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin Soit $u, v \in E_\lambda(A)$, notons U, V les matrices colonnes correspondantes. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. La matrice correspondante à $u + \mu v$ vaut $U + \mu V$. On a

$$A(U + \mu V) = AU + \mu AV$$

Comme $u, v \in E_\lambda(A)$, on a $AU = \lambda U$ et $AV = \lambda V$ et donc

$$A(U + \mu V) = \lambda U + \mu \lambda V = \lambda(U + \mu V)$$

Ainsi $u + \mu v \in E_\lambda(A)$, qui est donc stable par combinaisons linéaires. Finalement

$$\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sev de } \mathbb{R}^n.}$$

2. Soit $u \in E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A)$, en notant U la matrice colonne correspondante on a :

$$AU = \lambda_1 U \quad \text{et} \quad AU = \lambda_2 U$$

Donc

$$\lambda_1 U = \lambda_2 U$$

D'où

$$(\lambda_1 - \lambda_2)U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_{\lambda_1}(A) \cap E_{\lambda_2}(A) = \{(0, \dots, 0)\}}$$

3. (a)

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2-2 \\ 0+0+0 \\ 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{u_1 \in E_1(A)}$$

$$A \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+2-2 \\ 4+0+0 \\ 0+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U_2$$

(b) $\boxed{u_2 \in E_2(A)}$

(c) Afin de déterminer une base de $E_{-1}(A)$, on résout $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ce qui donne

4. (a) (u_1, u_2, u_3) est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i = (0,0,0)$$

on obtient

$$\begin{cases} x & +4y & +z & = 0 \\ x & +2y & -z & = 0 \\ x & +y & +z & = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\iff \begin{cases} x & +4y & +z & = 0 \\ & -2y & -2z & = 0 \\ & -3y & 0 & = 0 \end{cases}$$

$C_x \longleftrightarrow C_y$

$$\iff \begin{cases} x & +z & +4x & = 0 \\ & -2z & -2y & = 0 \\ & & -3y & = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné et de de rang 3 avec 3 inconnus il est donc de Cramer et admet comme unique solution $(0,0,0)$. La famille de vecteurs est donc libre et grâce à l'argument sur le cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $rg(P) = rg(\mathcal{F}) = 3$. Ainsi P est une matrice carrée de taille 3 et de rang 3. Elle est donc inversible.

(c) PC_i vaut la colonne i de P c'est-à-dire U_i :

$$PC_i = U_i$$

Ainsi en multipliant à gauche par P^{-1} on obtient

$$\boxed{C_i = P^{-1}U_i}$$

5. (a) Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une telle matrice.
On obtient avec $MC_1 = C_1$

$$\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les autres relations déterminent entièrement la matrice M, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$P^{-1}APC_1 = P^{-1}AU_1 = P^{-1}U_1 = C_1$$
$$P^{-1}APC_2 = P^{-1}AU_2 = P^{-1}2U_2 = 2C_2$$
$$P^{-1}APC_2 = P^{-1}AU_2 = P^{-1}(-U_3) = -C_3$$

Donc $P^{-1}AP$ satisfait les relations de la question précédente, on a donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Agro 2022)**.** [3] Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.

On tire au hasard une boule et on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et l'on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.

Pour tout entier i, on pourra noter N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ème boule tirée s'il y a eu au moins i tirages, et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2 puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.
4. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
5. Justifier (succinctement) que
$$P_{N_1=i}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k - 1)$$
6. En déduire que pour tout $k \geq 2$, on a :
$$P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k - 1).$$
7. Montrer alors que pour tout $k \geq 2$:
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} P(X_n = k - 1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k)$$
8. En déduire que $E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1}$.
9. En déduire une expression de $E(X_n)$ sous forme d'une somme.
10. (a) Prouver que pour tout entier $k \geq 2$, on a :
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt.$$

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

[3]. Les questions 5, 7, 10.b 11, 12 et 14 ont été ajoutées au sujet original afin de le rendre plus accessible au niveau sup

(b) Déterminer à l'aide des inégalités précédentes deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\ln(n+1) + A \leq H_n \leq \ln(n) + B$$

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

(d) En déduire un équivalent de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

11. Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1}.$$

12. En déduire que

$$V(X_{n+1}) = V(X_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

13. En déduire une expression de $V(X_n)$ sous forme de somme.
14. On admet qu'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq C$$

En déduire un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction 3.

1. $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ et on a

$$P(X_2 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

et

$$P(X_2 = 1) = P(N_1 = 2) = \frac{1}{2}$$

Son espérance vaut

$$E(X_2) = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

On calcule sa variance à l'aide de la formule de Koenig-Huygens, on a

$$E(X_2^2) = 1^2\frac{1}{2} + 2^2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

et donc

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

2. $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$P(X_3 = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_3 = 3) = P(N_1 = 3 \cap N_2 = 2 \cap N_3 = 1) = P(N_1 = 3)P(N_2 = 2 | N_1 = 3)P(N_3 = 1 | N_1 = 3 \cap N_2 = 2) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}$$

$$P(X_3 = 2) = 1 - (P(X_3 = 1) + P(X_3 = 3)) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

De plus,

$$E(X_3) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

3. $X_n(\Omega) = [1, n]$

4. $P(X_n = 1) = P(N_1 = 1) = \frac{1}{n}$ $P(X_n = n) = P(N_1 = n \cap N_2 = n-1 \cap ... \cap N_n = n) = \frac{1}{n!}$
5. Si $N_1 = i$, il ne reste plus que $i-1$ boules à l'issue du premier tirage, on est donc ramené au problème similaire avec une urne contenant $i-1$ boules et un tirage en moins.
   On obtient bien
   $$P_{N_1=i}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k-1)$$
6. On applique la formule des probabilités totales au SCE $(N_1 = 2, \dots, N_1 = n)$ on obtient
   $$P(X_n = k) = \sum_{i=2}^{n} P(X_n = k | N_1 = i) P(N_1 = i)$$
   Remarquons que N_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et donc
   $$P(N_1 = i) = \frac{1}{n}$$
   A l'aide de la question précédente on obtient bien
   $$P(X_n = k) = \sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1) \frac{1}{n}$$
   et en utilisant la linéarité de la somme on obtient l'égalité demandée.
7. D'après l'exercice précédent :
   $$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} P(X_{i-1} = k-1)$$
   On a donc en séparant la somme :
   $$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n} P(X_{i-1} = k-1) + \frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) \\ &= \frac{1}{n+1} n P(X_n = k) + \frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) \\ &= \frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k) \end{aligned}$$
8. On a
   $$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} k P(X_{n+1} = k) && \text{Par définition de l'espèrance.} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_{n+1} = k) && \text{En utilisant Chasles et la question 4} \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k \left(\frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k) \right) \\ & && \text{D'après la question précédent} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k P(X_n = k) \\ & && \text{En utilisant la linéarité de la somme} \end{aligned}$$

Simplifions les deux sommes. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X_n = k) && \text{Par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) + \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) && \text{En utilisant la linéarité} \\
&= 1 + E(X_n)
\end{aligned}$$

Par définition de l'espérance et d'un système complet d'événements

On a d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) &= \sum_{k=2}^{n} kP(X_n = k) && \text{Le dernier terme est nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) - P(X_n = 1) && \text{on ajoute à la somme le terme k=1} \\
&= E(X_n) - \frac{1}{n} && \text{Par définition de espérance et en utilisant la question 4}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}(1 + E(X_n)) + \frac{n}{n+1}\left(E(X_n) - \frac{1}{n}\right) \\
&= E(X_n) + \frac{1}{n+1} && \text{En simplifiant les différents termes.}
\end{aligned}$$

On obtient bien

$$\boxed{E(X_{n+1}) - E(X_n) = \tfrac{1}{n+1}}$$

9. En sommant l'égalité obtenue on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} E(X_{k+1}) - E(X_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

Et on reconnait une somme telescopique :

$$E(X_n) - E(X_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Comme $E(X_1) = 1$ on a

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

10. (a) Par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ On obtient pour tout $k \geq 2$, pour tout $t \in [k, k+1]$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par positivité de l'intégrale on a alors :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

D'où

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k}$$

De même sur $[k-1, k]$

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}$$

Par positivité de l'intégrale on a alors :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dt$$

D'où

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt$$

(b) En sommant entre 2 et n on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt.$$

Et donc en utilisant Chasles :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \leq H_n - 1 \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}\, dt.$$

On calcule les intégrales on obtient finalement :

$$\boxed{\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq 1 + \ln(n)}$$

$A = -\ln(2) + 1$ et $B = 1$

(c) On divise par $\ln(n)$ l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)}{ln(n)} + \frac{-\ln(2)+1}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

Remarquons que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{ln(n)} = 1$ (on peut factoriser par n au numérateur par exemple) et donc le théorème d'encadrement assure que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1}$$

D'où l'équivalent demandé.

(d) La question précédente et la question 9 assure que

$$\boxed{E(X_n) \sim \ln(n)}$$

11. On reprend les calculs menés dans la question 8 :
On a

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) && \text{D'après le théorème de transfert .}\\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) && \text{En utilisant Chasles et la question 4}\\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 \left(\frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} P(X_n = k) \right)\\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k)\\
& && \text{En utilisant la linéarité de la somme}
\end{aligned}$$

Simplifions les deux sommes. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 P(X_n = k) && \text{Par changement d'indice} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) + \sum_{k=1}^{n} 2k P(X_n = k) + \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X_n = k) \\
& && \text{En utilisant la linéarité} \\
&= 1 + 2E(X_n) + E(X_n^2)
\end{aligned}$$

e l'espérance et d'un système complet d'événements et à l'aide du théorème de transfert pour la dernière somme

On a d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} k^2 P(X_n = k) &= \sum_{k=2}^{n} k^2 P(X_n = k) && \text{Le dernier terme est nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X_n = k) - P(X_n = 1) && \text{on ajoute à la somme le terme k=1} \\
&= E(X_n^2) - \frac{1}{n} && \text{En utilisant le théorème de transfert et la question 4}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}^2) &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left(1 + 2E(X_n) + E(X_n^2)\right) + \frac{n}{n+1}\left(E(X_n^2) - \frac{1}{n}\right) \\
&= E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1} && \text{En simplifiant les différents termes.}
\end{aligned}$$

On obtient bien

$$\boxed{E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + \tfrac{2}{n+1}E(X_n) + \tfrac{1}{n+1}.}$$

12. On utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_{n+1}) = E(X_{n+1}^2) - E(X_{n+1})^2$$

En remplacant le premier terme à l'aide de la question précédente et le second terme à l'aide de la question 8 on obtient

$$\begin{aligned}
V(X_{n+1}) &= E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1} - \left(E(X_n) + \frac{1}{n+1}\right)^2 \\
&= E(X_n^2) + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{n+1} - \left(E(X_n)^2 + \frac{2}{n+1}E(X_n) + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= E(X_n^2) - E(X_n)^2 + \frac{1}{n+1} - + \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

De nouveau à l'aide de Koenig Huygens on conclut que

$$\boxed{V(X_{n+1}) = V(X_n) + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{(n+1)^2}}$$

13. On reprend les calculs de la question 9 avec la variance

$$\sum_{k=1}^{n-1} V(X_{k+1}) - V(X_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

Et on reconnait une somme telescopique :

$$V(X_n) - V(X_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

Comme $V(X_1) = 0$ on a

$$V(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

14. En divisant par $\ln(n)$ on remarque que

$$\frac{V(X_n)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Or L'énoncé nous dit que $0 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq C$ donc en appliquant le théorème d'encadrement on voit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{V(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$