

Ex3

① On pose $P(n): v_n = \frac{2}{2n+1}$.

Init Pour $n=0$

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2 \quad \text{donc} \quad P(0) \text{ est vraie}$$

Hérédité Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \frac{2}{2n+1}$, alors

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} \stackrel{(HR)}{=} \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1 + 2} = \frac{2}{2n+3}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion, on a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{2n+1}}$$

② On raisonne par récurrence double.

Soit $P(n): "u_n = -1 + n(n-1)"$

Initialisation:

$$\text{Pour } n=0 \quad -1 + 0(0-1) = -1 = u_0$$

$$n=1 \quad -1 + 1(1-1) = -1 = u_1$$

Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité On suppose qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$,
 $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \\ &= (n+1)(-1 + (n+1)(n)) - (n+2)(-1 + n(n-1)) \quad \text{HR} \\ &= -n - 1 + n(n+1)^2 + n + 2 - n(n-1)(n+2) \\ &= 1 + n(n^2 + 2n + 1) - (n^2 - n)(n+2) \\ &= 1 + n^3 + 2n^2 + n - (n^3 + n^2 - 2n) \\ &= 1 + n^2 + 3n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad -1 + (n+2)(n+1) &= -1 + n^2 + 3n + 2 \\ &= 1 + n^2 + 3n \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -1 + n(n-1)}$$

Pb 1

1. a.

$$\begin{aligned}\mu + \nu &= \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \\ &= \sqrt[3]{7^2 - (5\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt[3]{49 - 50}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu^3 + \nu^3 &= 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} \\ &= 14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{b} (\mu + \nu)^3 &= \mu^3 + 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 + \nu^3 \\ &= \mu^3 + \nu^3 + 3\mu\nu(\mu + \nu) \\ &= 14 - 3(\mu + \nu)\end{aligned}$$

2a

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda - 14$$

$$= (\mu + \nu)^3 + 3(\mu + \nu) - 14$$

$$= 14 - 3(\mu + \nu) + 3(\mu + \nu) - 14$$

$$= 0$$

λ est racine de P.

d'après 1b

$$\textcircled{b} \quad P(2) = 2^3 + 3 \times 2 - 14 \\ = 8 + 6 - 14 \\ = 0$$

de plus

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

ainsi :

$$P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) \iff \begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=3 \\ -2c=-14 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=7 \end{cases}$$

$$\textcircled{c} \quad P(x) = 0 \iff (x-2)(x^2+2x+7) = 0$$

$$\iff x=2 \text{ ou } x^2+2x+7=0$$

Or le discriminant de x^2+2x+7 est $\Delta = 2^2 - 4 \times 7 = -24 < 0$

Donc ce trinôme n'a pas de racines.

On obtient alors

$$P(x) = 0 \iff x=2$$

Or 2 est racine de P d'après 2a donc

$$\boxed{d=2}$$

$$\begin{aligned}
 3] \\
 \textcircled{a} \quad Q(x) &= (x-\mu)(x-\nu) \\
 &= x^2 - (\mu+\nu)x + \mu\nu \\
 &= x^2 - 2x + \mu\nu \\
 &= x^2 - 2x - 1.
 \end{aligned}$$

$\textcircled{b}$ μ et ν sont racines de Q , donc racines de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.

4. Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

Ses racines sont

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

On identifie μ et ν car $\mu > \nu$

ainsi

$$\boxed{\mu = x_1 = 1 + \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\nu = x_2 = 1 - \sqrt{2}}$$