Devoir surveillé n° 1

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les résultats seront encadrés ou soulignés. On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices

Exercice 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\lfloor 2x-1 \rfloor = 2$
2. $\sqrt{x+1} = x-1$
3. $\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \dfrac{16x+2}{x+1}$
4. $\left|x^2-1\right| \leq |2x|$

Exercice 2. 1. Soit (v_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{2}{2n+1}$$

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -1 + n(n-1)$$

.

Problème 1. On considère les deux réels suivants :

$$\mu = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \nu = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

Le but de ce problème est de simplifier les expressions de μ et ν.

1. (a) Calculer $\mu\nu$ et $\mu^3+\nu^3$.
   (b) Développer $(\mu+\nu)^3$.
2. On pose $\lambda = \mu+\nu$ et $P(x) = x^3+3x-14$ pour tout réel x.
   (a) Déduire des questions précédentes que $P(\lambda) = 0$.
   (b) Vérifier que $P(2) = 0$ (on dit que 2 est racine évidente) puis trouver trois réels a, b et c tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-2)\left(ax^2+bx+c\right).$$
   (c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de λ.
3. On pose $Q(x) = (x-\mu)(x-\nu)$ pour tout réel x.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier l'expression de $Q(x)$ à l'aide des résultats précédents.
   (b) En déduire que μ et ν sont solutions de l'équation $x^2-2x-1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.

Problème 2. On souhaite résoudre l'inéquation suivante

$$I(a) \quad : \quad ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1 \geq 0$$

d'inconnue x et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. A quelle.s condition.s sur a cette inéquation n'est-elle pas de degré 2 ? La résoudre pour la.les valeur.s correspondante.s

   Dans toute la suite de l'exercice nous supposerons que a est tel que l'inéquation est de degré 2.

2. Montrer alors que le discriminant de $ax^2-2a^2x+ax-x+2a-1$ en tant que polynome du second degre en x, vaut
   $$\Delta(a) = 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1$$

3. Montrer que $\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2$

4. (a) Soit S l'ensemble des solutions de $\Delta(a) = 0$. Déterminer S

   (b) Résoudre $I(a)$ pour $a \in S$.

   On suppose désormais que $a \notin S$.

5. (a) Justifier que $\Delta(a) > 0$ et exprimer $\sqrt{\Delta(a)}$ à l'aide de valeur absolue.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$

   (c) En déduire que l'ensemble des racines de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ est
   $$R = \left\{\frac{1}{a}, 2a-1\right\}$$

   On note
   $$r_1(a) = \frac{1}{a} \quad r_2(a) = 2a - 1$$

6. Résoudre $r_1(a) \geq r_2(a)$.

7. Conclure en donnant les solutions de $I(a)$ en fonction de a.

Informatique

Exercice 3. Un site internet d'impression de photos. Le tarif est de :
- moins de 50 photos : 0.5 €par photos
- plus de 51 : 0.35 €par photos

Définir en python une fonction `prix(n)` prenant comme argument un entier n et renvoyant le prix à payer pour une commande de n photos.

Exercice 4. Que fait la fonction suivante :

```python
def mystere(x):
    if x>=0:
        return x
    else:
        return -x
```