DS 2 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.
On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.
Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement et justifiez les choix que vous êtes amenés à faire.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1.

Résoudre sur $[0, 2\pi]$ l'équation :

$$\frac{(2\cos(x) - 1)(\sin(x) + \frac{1}{2})}{(2\cos(x) + \sqrt{2})} \geq 0$$

Indication : on pourra résoudre les inéquations :$2\cos(x) - 1 \geq 0$, $\sin(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ et $2\cos(x) + \sqrt{2} \geq 0$ puis dresser un tableau de signe.

Exercice 2.

On cherche à résoudre l'inéquation trigonométrique : $(E) : \sin(3x) - \sin(x) \geq 0$.

1. Les réels suivants sont-ils solutions de (E) ?

   a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{-3\pi}{2}$ c) $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$: $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-2y^3 + y \geq 0$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $[0, 2\pi]$, et les représenter sur le cercle trigonométrique.

Exercice 3.

On souhaite résoudre l'équation suivante : $(E) : |\cos(x)| = |\sin(x)|$

1. À quelle condition sur a, b ê a-t-on : $a = b \iff a^2 = b^2$?
2. En déduire que (E) est équivalente à l'équation : $\cos(2x) = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de E sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\pi, \pi]$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x)^2 + \cos(x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Justifier que l'on peut limiter l'étude de f à $D_{et} = \left[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
4. Construire le tableau de variations de f sur D_{et}, en y faisant figurer les limites appropriées (justifiez brièvement comment vous les obtenez).
5. Tracer la courbe de f entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 5. Problème A

Dans cette exercice, on cherche à étudier les fonctions de la forme

$$f_a(x) = (x-a)^x \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+$$

.

I : Cas a=0

1. Étudier la fonction $f_0(x) = x^x$: domaine de définition, variations, limites, allure de la courbe.

II : Cas a>0

2. Déterminer le domaine D de définition de f_a
3. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
4. Calculer f_a'.
5. On pose sur D, $g_a(x) = \ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}$.
   a) Dresser le tableau de variations de g_a et montrer qu'elle admet un minimum noté m.
   b) Pour quelle valeur α de a ce minimum est il nul ?
   c) Montrer que si $a > \alpha$ alors f_a est strictement croissante
   d) On suppose $a \in]0, \alpha[$, montrer que f_a' s'annule en deux points x_1, x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$. (on ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes de x_1 et x_2.) Donner alors le tableau de variations de f_a.
6. Étudier les position relatives des différentes courbes f_a.
7. Tracer sur le même graphique qu'en partie I la cour be représentative de f_1.

Exercice 6. Problème B

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{4(1+x)}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
3. Donner les asymptotes de f, ainsi que l'équation des tangentes aux points $x = -2$ et $x = 0$.
   On admet que la limite de $f'(x)$ quand x tend vers -1 par valeurs inférieures est nulle.
4. Tracer alors la courbe représentative de f.
5. Donner les images directes $f\left(]-\infty, -2]\right)$ et $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.
6. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle J à déterminer.
   On note $g : J \to \mathbb{R}^+$ la bijection réciproque.
7. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in J$, montrer que $f(x) = y \iff x^2 - 4\ln(y)x - 4\ln(y) = 0$
8. Résoudre alors cette équation et calculer l'expression explicite de g.