

DS2 - Archive - Corrigé

Exercice 1 - Pour $x \in (0, 2\pi)$, on a :

- $2\cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$
- $\sin(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$
- $2\cos(x) + \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow x \in [0, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$$

En posant $f(x) = \frac{(2\cos x - 1)(\sin x + \frac{1}{2})}{2\cos x + \sqrt{2}}$ sur $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$,
de f est donc :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-	0	+	+
$\sin x + \frac{1}{2}$	+	+	+	0	-	-	0	+
$2\cos x + \sqrt{2}$	+	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	+	0	+	0	+

D'où $S = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}] \cup [\frac{11\pi}{6}, 2\pi]$

Exercice 2

- $\sin(3 \times \frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3}) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, donc $\frac{\pi}{3}$ n'est pas solution de (E)
- $\sin(3 \times (-\frac{3\pi}{2})) - \sin(-\frac{3\pi}{2}) = -1 - 1 = -2 < 0$, donc $-\frac{3\pi}{2}$ n'est pas solution de (E)
- $\sin(3 \times \frac{5\pi}{6}) - \sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{2}) - \sin(\frac{5\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

Donc $\frac{5\pi}{6}$ est solution de (E).

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\sin(3x) = \sin(2x + x) = \cos(2x)\sin(x) + \sin(2x)\cos(x)$

Or $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

D'où : $\sin(3x) = (1 - 2\sin^2(x))\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x)\cos(x)$

$$\begin{aligned}
 &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x \\
 &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x (1 - \sin^2 x) \\
 &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x \\
 &= 3\sin x - 4\sin^3 x
 \end{aligned}$$

3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a : $-2y^3 + y \geq 0 \iff y(-2y^2 + 1) \geq 0$

$\iff y(1 - \sqrt{2}y)(1 + \sqrt{2}y) \geq 0$

Or $1 - \sqrt{2}y = 0 \iff y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et $1 + \sqrt{2}y = 0 \iff y = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

① sur le tableau de signes :

y	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
y		-	0	+	+
$1 - \sqrt{2}y$	+	+	+	0	-
$1 + \sqrt{2}y$	-	0	+	+	+
$-2y^3 + y$	+	0	-	0	-

$\sqrt{2} > 0$ $-\sqrt{2} < 0$ $\sqrt{2} > 0$

① sur l'ensemble de solutions : $\boxed{]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]}$.

4. On a donc : $(E) \iff 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x) - \sin(x) \geq 0$

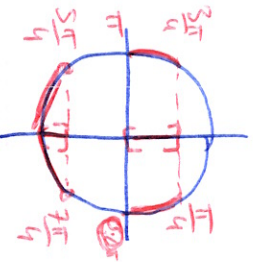
$\iff 2 \sin(x) - 4 \sin^3(x) \geq 0$

$\iff \sin(x) - 2 \sin^3(x) \geq 0$

$\iff \sin(x) \in]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\iff \sin(x) \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

① où : $\boxed{y = [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]}$.



Exercice 3 :

1. Cette équivalence est vraie dès que a et b sont du même signe

2. Les deux membres de (E) sont positifs ($\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$) donc on peut élever au carré. ① où :

$(E) \iff \cos^2(x) = \sin^2(x)$

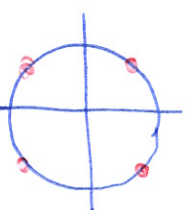
$\iff \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$

$\iff \cos(2x) = 0$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) = 0 \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\frac{\pi}{2}]$.

① où, sur $\mathbb{R}$: $\boxed{y = \{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \}}$

Ainsi, sur $] -\pi, \pi]$: $\boxed{y = \{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \}}$



Exercice 4.

1. Le domaine de définition de f est celui de la fonction tangente :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

2. Pour tout $x \in D_f$, on a $x + 2\pi \in D_f$, $-x \in D_f$, et :

$$f(x + 2\pi) = \tan^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \tan^2 x + \cos x = f(x) \text{ puisque } \tan \text{ et } \cos \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \tan^2(-x) + \cos(-x) = (-\tan x)^2 + \cos(x) \text{ par parité de } \cos \text{ et imparité de } \tan \\ &= \tan^2 x + \cos(x) = f(x). \end{aligned}$$

Par 2π -périodicité, on peut restreindre le domaine d'étude à

$$\left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[.$$

Mais par parité de f , on peut restreindre encore au domaine d'étude :

$$D_{\text{ét}} = \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$$

3. f est dérivable sur son domaine de définition par opérations, et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in D, \quad f'(x) &= \tan'(x) \times 2 \tan(x) + \cos'(x) \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \times 2 \sin(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

$$= \sin(x) \times \frac{2 - \cos^3(x)}{\cos^3(x)}$$

$$\text{Or : } \forall x \in [0, \pi], \sin(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq 2 - \cos^3(x).$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $\cos^3(x)$ sur D et, donc du signe de $\cos(x)$ puisque $\forall y \in \mathbb{R}, y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ (étude croissante).

4. $\cos$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et négative sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\text{De plus : } f(0) = \tan^2(0) + \cos(0) = 0^2 + 1 = 1$$

$$f(\pi) = \tan^2(\pi) + \cos(\pi) = 0^2 + (-1) = -1$$

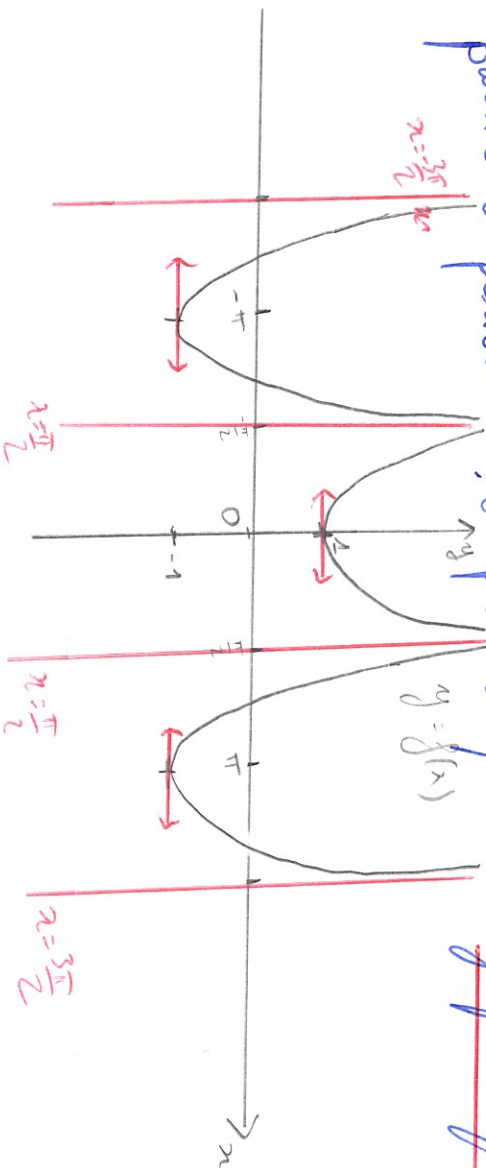
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \text{ par opérations sur les limites } \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \right)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty \text{ par opérations } \left(\tan x \rightarrow -\infty \right)$$

D'après le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$

5. Par parité et périodicité, on peut compléter le graphe de f .



Problème A. $f_a(x) = (x-a)^x$, $a \in \mathbb{R}^+$

I-Cas $a=0$

1. $x^x = e^{x \ln(x)}$ est définie pour $x > 0$: $\mathcal{D}_{f_0} = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

De plus, f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et opérations, et on a
 $\forall x > 0$, $f_0'(x) = (1 \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)}$.

$\mathcal{D}'_{f_0}$ $f_0'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 \geq 0$ puisque $\forall a, e^a > 0$
 $\Leftrightarrow \ln(x) \geq -1$
 $\Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$.

De plus, $f_0(\frac{1}{e}) = e^{\frac{1}{e} \ln(\frac{1}{e})} = e^{-\frac{1}{e}}$

- $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $e^{x \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par composition.
- $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc $e^{x \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e^0 = 1$ par composition.

$\mathcal{D}'_{f_0}$ & tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f_0(x)$	1	$e^{-1/e}$	$+\infty$

D'où l'allure de la courbe de f_0 :



II - Cas $a > 0$

2. $f_a(x) = (x-a)^x = e^{x \ln(x-a)}$, donc f_a est définie pour $x-a > 0$, c'est-à-dire sur $]a, +\infty[$.

3. On a $\lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} x = a > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow a^+} x \ln(x-a) = -\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow a^+} f_a(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-a) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(x-a)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$.

4. f_a est dérivable sur $]a, +\infty[$ par opérations et composition.

Pour tout $x > a$, on a :

$$f_a'(x) = \left(1 \times \ln(x-a) + x \times 1 \times \frac{1}{x-a}\right) e^{x \ln(x-a)} = \left(\ln(x-a) + \frac{x}{x-a}\right) e^{x \ln(x-a)}$$

5. a) $g_a(x) = \ln(x-a) + \frac{x}{x-a}$ est bien définie sur $D =]a, +\infty[$, et dérivable

sur le domaine par opérations. D'où :

$$\forall x > a, \quad g_a'(x) = 1 \times \frac{1}{x-a} + \frac{1 \times (x-a) - x \times 1}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a} + \frac{x-a-x}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{x-a}{(x-a)^2} + \frac{-a}{(x-a)^2} = \frac{x-2a}{(x-a)^2}$$

D'où $g_a'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-2a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2a$. On a $a > 0$ donc $2a > a$

Ainsi, le tableau de variations de g_a est le suivant

x	a	$2a$	$+\infty$
$g_a'(x)$	$\parallel$	$-$	$+$
$g_a(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	a	$2a$	$+\infty$
	$\lim_{x \rightarrow a^+} g_a(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 2a^+} g_a(x) = \ln(a) + \frac{1}{1-\frac{a}{a}} = \ln(a) + \frac{1}{0^+} \rightarrow +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_a(x) = \ln(x-a) + \frac{x}{x-a} \rightarrow 0$

Ainsi, g_a admet bien un minimum, atteint en $x = 2a$,

et qui vaut $g_a(2a) = \ln(2a-a) + \frac{2a}{2a-a} = \ln(a) + \frac{2a}{a} = 2 + \ln(a) =: m$

b) On a : $m = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln(a) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(a) = -2$$

$$\Leftrightarrow a = e^{-2}$$

Donc m est nul pour $a = x = e^{-2}$

c) Si $a > x$, alors g_a a un minimum strictement positif, par stricte croissance de $\ln$.

D'où : $\forall x > a$, $g_a(x) > 0$. Ainsi : $\forall x > a$, $f_a'(x) = g_a(x) e^{x \ln(x-a)} > 0$.

Donc f_a est strictement croissante sur $\mathcal{D} =]a; +\infty[$

d) Si : $a < x$, alors le tableau de variations de g_a est :

x	a	$2a$	$+\infty$
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m < 0 \rightarrow +\infty$

Donc par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a < x_1 < 2a < x_2$, et $\overbrace{g_a(x)}^{>0} = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, x_2\}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, +\infty[$, $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow g_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$.

Alors le tableau de variations de f_a est :

x	a	x_1	x_2	$+\infty$
$f_a(x)$	$+$	0	$-$	0
$f_a'(x)$	$+$	0	$-$	0
f_a	0	$\searrow$	$\searrow$	$+\infty$

6. Soit $a_1 < a_2$ deux réels positifs. Alors : $\forall x > a_2$, on a :

$$f_{a_1}(x) = e^{x \ln(x-a_1)} > e^{x \ln(x-a_2)} = f_{a_2}(x) \quad \text{puisque } x-a_1 > x-a_2, \ln \text{ et exp sont strictement croissantes, et } x > 0.$$

Ainsi, la courbe représentative de f_2 est en-dessous de celle de f_{a_1} .

Problème 3 - $f(x) = e^{\frac{x^2}{4(1+x)}}$

1) f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie $4(1+x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -1$. Ainsi, on a: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2). Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a $\frac{x^2}{4(1+x)} = \frac{x^2}{4+4x} = \frac{x^2}{x(4+\frac{4}{x})} = \frac{x}{4+\frac{4}{x}}$.

Or $4+\frac{4}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 4$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{4(1+x)} \right) = \pm\infty$. Par composition,

on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

• Lorsque $x \rightarrow -1^+$, on a $\frac{1}{1+x} \rightarrow +\infty$ et $x^2 \rightarrow 1$. D'où, par composition:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$

3). Selon la question précédente, f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (en $-\infty$), et une asymptote verticale d'équation $x=-1$ (en -1^+).

• Tangentes: Par opérations et composition par exp, f est dérivable sur $\mathcal{D}$, de dérivée donnée par:

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{2x(4(1+x)) - 4x^2}{(4(1+x))^2} e^{\frac{x^2}{4(1+x)}} = \frac{8x^2 + 8x - 4x^2}{16(1+x)^2} e^{\frac{x^2}{4(1+x)}}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x}{16(1+x)^2} e^{\frac{x^2}{4(1+x)}} = \frac{4x(x+2)}{16(1+x)^2} e^{\frac{x^2}{4(1+x)}}$$

$$\text{En } x=-2: f(2) = e^{\frac{4}{4(-1)}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad f'(-2) = \frac{4(-2)(-2)}{16(-1)^2} \times \frac{1}{e} = 0$$

D'où l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x=-2$: $y = \frac{1}{e}$

• En $x=0$: $f(0) = e^{\frac{0}{4 \times 1}} = e^0 = 1$ et $f'(0) = \frac{4 \times 0 \times 2}{16 \times 1} \times e^0 = 0$.

Donc la tangente à $\mathcal{C}$ en $x=0$ a pour équation : $y=1$.

4) $\forall x \in \mathcal{D}$, on a $e^{\frac{x^2}{4(1+x)}} > 0$ et $16(1+x^2) > 0$ et $x^2 + 2 > 0$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $x(x+2)$.

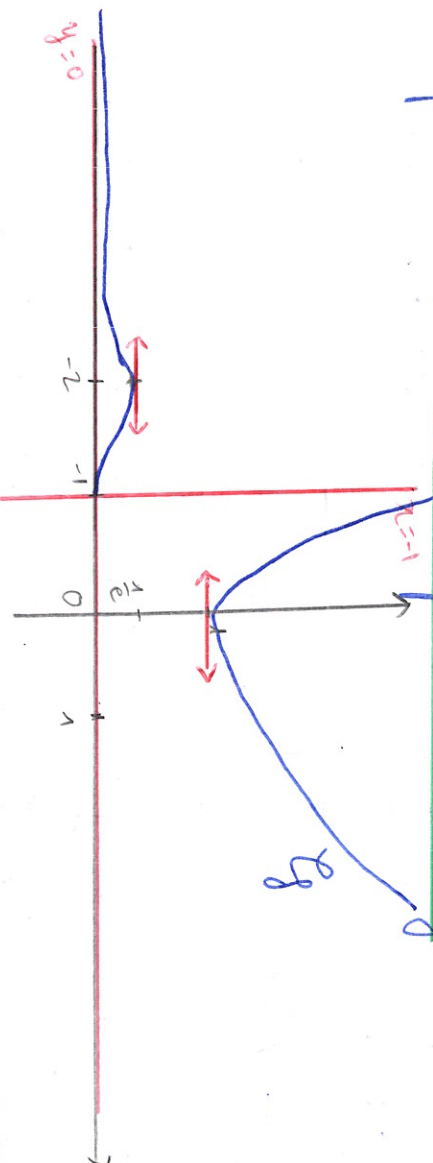
x	$-\infty$	-2	0	1	0	$+\infty$
$x(x+2)$		+	0	-	-	0
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Diagram illustrating the sign analysis of the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ across intervals defined by critical points $x = -2$ and $x = 0$.

The intervals and signs are:

- Interval $(-\infty, -2)$: $f'(x) > 0$, $f(x) < 0$
- Interval $(-2, 0)$: $f'(x) < 0$, $f(x) < 0$
- Interval $(0, 1)$: $f'(x) = 0$, $f(x) < 0$
- Interval $(1, 0)$: $f'(x) < 0$, $f(x) < 0$
- Interval $(0, +\infty)$: $f'(x) > 0$, $f(x) < 0$

On peut tracer la courbe représentative de f avec toutes ces informations :



5) f est croissante sur $] -\infty, -2]$, donc $f(]-\infty, -2]) =]0, \frac{1}{4}]$.

f est croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, et $f(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1/4}{4 \times 3/2}} = e^{\frac{1/4}{6}} = e^{\frac{1}{24}}$

d'où : $f([\frac{1}{2}, 1]) = [e^{\frac{1}{24}}, e^{\frac{1}{8}}]$

et $f(1) = e^{\frac{1}{4 \times 2}} = e^{\frac{1}{8}}$.

6) f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (puisque $f' > 0$ sur $\mathbb{R}^+$).

Ainsi, f est injective sur $\mathbb{R}^+$, et :

$f(\mathbb{R}^+) = [\frac{1}{4}, +\infty[$ puisque $f(0)=1$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Donc f réalise bien une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $S = [1, +\infty[$.

7) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in [1, +\infty[$. On a $f(x) = y \iff \ln(f(x)) = \ln(y)$ puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Ainsi: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2}{4(1+x)} = \ln(y)$

$$\Leftrightarrow x^2 = \ln(y) \times 4 \times (1+x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4\ln(y)x - 4\ln(y) = 0$$

8) Soit $y \in [1, +\infty[$. Le trinôme $x^2 - 4\ln(y)x - 4\ln(y)$ a pour discriminant $\Delta = 16\ln^2(y) + 16\ln(y) = 16\ln(y)(\ln(y)+1) \geq 0$

puisque $y \geq 1$ donc $\ln(y) \geq 0$.

$\rightarrow$ Si $y = 1$, le trinôme a une seule racine $x_0 = \frac{4\ln(y)}{2} = 2\ln(1) = 0$.

$\rightarrow$ Si $y > 1$, alors $\Delta > 0$, et on a donc deux racines données par

$$\frac{4\ln(y) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{4\ln(y) \pm 4\sqrt{\ln(y)(\ln(y)+1)}}{2} = 2\ln(y) \pm 2\sqrt{\ln(y)(\ln(y)+1)}$$

Ainsi, l'antécédent positif de y par f est: $2\ln(y) + 2\sqrt{\ln(y)(\ln(y)+1)}$

Notons que $2\ln(1) + 2\sqrt{\ln(1)(\ln(1)+1)} = 0 + 0 = 0$, donc cette formule convient aussi pour $y = 1$. Ainsi, on a:

$$g: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \longmapsto 2\ln(y) + \sqrt{\ln(y)(\ln(y)+1)}$$

