

DS3 - Archive - Corrigé des complexes

(Pour le reste : cf Archive du DS2).

Exercice 1

$$\begin{aligned} 1. f(ib) &= (ib)^4 - 2(ib)^3 + 6(ib)^2 - 8ib + 8 \\ &= i^4 b^4 - 2i^3 b^3 + 6i^2 b^2 - 8ib + 8 \\ &= b^4 + 2ib^3 - 6b^2 - 8ib + 8 \quad \text{car } i^4=1, i^3=-i \text{ et } i^2=-1 \\ &= (b^4 - 6b^2 + 8) + i(2b^3 - 8b) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \operatorname{Re}(f(ib)) = b^4 - 6b^2 + 8 \text{ et } \operatorname{Im}(f(ib)) = 2b^3 - 8b$$

2. On a $\operatorname{Re}(f(ib)) = 0 \Leftrightarrow g(b) = 0$ où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale
 $x \mapsto x^2 - 6x + 8$
de degré 2. Son discriminant est $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$, donc il y a deux racines réelles distinctes, données par $\frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = 3 \pm 1$: 4 et 2.

$$\text{Ainsi : } \operatorname{Re}(f(ib)) = 0 \Leftrightarrow b^2 = 2 \text{ ou } b^2 = 4 \Leftrightarrow b \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ De plus, } \operatorname{Im}(f(ib)) = 0 &\Leftrightarrow 2b^3 - 8b = 0 \Leftrightarrow b(2b^2 - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } 2b^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } b^2 = 4 \Leftrightarrow b \in \{-2, 0, 2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ D'où } f(ib) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(ib)) = \operatorname{Im}(f(ib)) = 0 \\ &\Leftrightarrow b \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 2\} \cap \{-2, 0, 2\} = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(z) = 0$ admet 2 solutions imaginaires pures : $-2i$ et $2i$

Ces deux solutions sont opposées, mais surtout conjuguées.

3. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}: (z^2 + 4)(z^2 + \alpha z + \beta) &= z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + 4z^2 + 4\alpha z + 4\beta \\ &= z^4 + \alpha z^3 + (\beta + 4)z^2 + 4\alpha z + 4\beta. \end{aligned}$$

On cherche donc, par identification, à résoudre le système (S) $\begin{cases} 1 = 1 \\ \alpha = -2 \\ \beta + 4 = 6 \\ 4\alpha = -8 \\ 4\beta = 8 \end{cases}$.

$$\text{Or (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (-2, 2).$$

$$\text{D'où : } \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 2z + 2).$$

4) $\forall z \in \mathbb{C}$, on a:

• $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$

• $z^2 - 2z + 2 = 0$ est de degré 2, avec pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Il y a donc 2 solutions complexes non réelles, conjuguées, données par $\frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \underline{1 \pm i}$: ce sont $1-i$ et $1+i$

L'ensemble des solutions complexes de $f(z) = 0$ est donc $\boxed{\{1-i, 1+i, -2i, 2i\}}$

Exercice 2 -

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(4x) = \operatorname{Re}(e^{i4x}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^4)$.

$$\begin{aligned} \text{Or } (e^{ix})^4 &= (\cos x + i \sin x)^4 = (\cos^2 x + 2i \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x)^2 \\ &= (\cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x)(\cos^2 x + 2i \cos x \sin x - \sin^2 x) \\ &= \frac{\cos^4 x + 2i \cos^3 x \sin x - \cos^2 x \sin^2 x + 2i \cos^3 x \sin x + 4i^2 \cos^2 x \sin^2 x}{\neq 2i \cos x \sin^3 x - \sin^2 x \cos^2 x - 2i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x} \\ &= \cos^4 x + 2i \cos^3 x \sin x - \cos^2 x \sin^2 x + 2i \cos^3 x \sin x + 4i^2 \cos^2 x \sin^2 x \\ &\quad - 2i \cos x \sin^3 x - \sin^2 x \cos^2 x - 2i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \operatorname{Re}(e^{i4x}) &= \cos^4 x - 2\cos^2 x \sin^2 x - 4\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \quad \text{car } i^2 = -1 \\ &= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x. \end{aligned}$$

Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on a $\sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$ et donc

$$\cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

$$\text{D'où } \boxed{\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1}$$

2) On a $\cos(4 \times \frac{\pi}{8}) = 8\cos^4(\frac{\pi}{8}) - 8\cos^2(\frac{\pi}{8}) + 1$. D'après la question précédente

$$\text{Mais } \cos(4 \times \frac{\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0. \text{ D'où : } 8\cos^4(\frac{\pi}{8}) - 8\cos^2(\frac{\pi}{8}) + 1 = 0.$$

$$\text{De même : } 8\cos^4(\frac{3\pi}{8}) - 8\cos^2(\frac{3\pi}{8}) + 1 = \cos(4 \times \frac{3\pi}{8}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

Donc $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\cos(\frac{3\pi}{8})$ sont bien solutions de (E): $8X^4 - 8X^2 + 1 = 0$

3) On résout l'équation: $8Y^2 - 8Y + 1 = 0$, polynomiale de degré 2.

Son discriminant est: $\Delta = 64 - 32 = 32 > 0$, donc il y a deux racines

réelles distinctes données par $\frac{8 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$: $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Ainsi, on a: $\forall x \in \mathbb{R}$,

x est solution de (E) $\Leftrightarrow x^2$ est solution de $8y^2 - 8y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} > 0 \text{ ou } x^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \right\}$$

Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, donc $1 > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

$$\text{On en déduit que } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

4. $0 < \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

$$\text{Ainsi, } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\text{et de même, } \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Autre méthode: $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 3

1. a) $f(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$.

-1 est bien racine de f. On écrit donc f sous la forme $f(z) = (z+1)(az^2+bz+c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Or } \forall z \in \mathbb{C}, (z+1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c = az^3 + z^2(a+b) + z(b+c) + c$$

Donc on résout, par identification, le système (S) $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=1 \\ c=2 \end{cases}$

$$\text{On a (S)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1 \\ c=1-b=1+1=2 \\ c=2 \end{cases} \text{ D'où: } \forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z+1)(z^2 - z + 2)$$

Le discriminant de $z^2 - z + 2$ est $\Delta = 1 - 8 = -7$, donc des racines sont données par $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Ainsi, les racines de f sur $\mathbb{C}$ sont :

$$\left\{ -1, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \right\}$$

b) 0 a 3 antécédents par f (les racines), donc f n'est pas injective.

2. a) g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \text{ car un carré est toujours positif.}$$

Ainsi : g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

D'où le tableau de variations complet de g :

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$-\infty$	$+\infty$

b) g prend des valeurs arbitrairement grandes puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Donc $g(\mathbb{R})$ ne peut pas être majoré.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ donc $g(\mathbb{R})$ n'est pas minoré.

c) $g(\mathbb{R})$ est un intervalle non minoré et non majoré : on a nécessairement $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. g est donc surjective.

De plus, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Elle est donc bien bijjective.

d) Tangente en 0 : $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1$: $y = x + 2$.

Tangente en -1 : $g(-1) = 0$ et $g'(-1) = 4$: $y = 4(x+1) = 4x+4$

△ $g(x) - (x+2) = x^3$ le signe de x : g est au-dessus de sa tangente T_0 pour $x \geq 0$ et en-dessous pour $x \leq 0$.

3. a) la courbe représentative de g^{-1} s'obtient à partir de celle de g par une symétrie axiale d'axe $y = x$, la première bissectrice.

b) g n'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc g^{-1} est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}. \text{ Or } g(0) = 2 \text{ donc } g^{-1}(2) = 0 \text{ et donc } (g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'(0)}$$
$$= \frac{1}{3 \times 0^2 + 1} = 1. \text{ D'où } \boxed{g^{-1}(2) = 0 \text{ et } (g^{-1})'(2) = 1}.$$