DS 3 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.
On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.
Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement et justifiez les choix que vous êtes amenés à faire.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1.

Pour tout complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de b les parties réelles et imaginaires de $f(ib)$.
2. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures. Quel lien y a-t-il entre ces solutions ?
3. Déterminer deux réels α, β tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + \alpha z + \beta)$
4. Résoudre alors $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.

1. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$. On pourra utiliser l'identité suivante :
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
2. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ sont solutions de l'équation $(E) : 8X^4 - 8X^2 + 1 = 0$.
3. Résoudre l'équation (E), et en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
4. En déduire les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 3.

On définit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 + z + 2 \end{cases}$$

1. Étude de la fonction f sur $\mathbb{C}$.
   a) Vérifier que -1 est racine de f, et en déduire toutes les racines de f sur $\mathbb{C}$.
   b) La fonction f est-elle injective ?
2. On note g la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}$:

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 2 \end{cases}$$

   a) Dresser en justifiant le tableau de variations complet de g.

b) L'ensemble image $g(\mathbb{R})$ est-il majoré ? minoré ?

c) On admet que $g(\mathbb{R})$ est un intervalle. Montrer que g est bijective.

d) Déterminer les tangentes à la courbe en 0 et en -1, et étudier la position relative de la courbe et de sa tangente en 0.

e) Tracer le graphe de la fonction g, en faisant apparaître les tangentes déterminées.

3. Étude de la réciproque. On note $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de g.

 a) Comment obtenir la courbe représentative de g^{-1} à partir de celle de g ?

 b) **Bonus :** Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g^{-1}(2)$ et $(g^{-1})'(2)$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan(x)^2 + \cos(x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Justifier que l'on peut limiter l'étude de f à $D_{et} = \left[0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
3. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
4. Construire le tableau de variations de f sur D_{et}, en y faisant figurer les limites appropriées (justifiez brièvement comment vous les obtenez).
5. Tracer la courbe de f entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 5. Problème

Dans cette exercice, on cherche à étudier les fonctions de la forme

$$f_a(x) = (x-a)^x \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+$$

I : Cas a=0

1. Étudier la fonction $f_0(x) = x^x$: domaine de définition, variations, limites, allure de la courbe.

II : Cas a>0

2. Déterminer le domaine D de définition de f_a
3. Calculer les limites aux bornes de ce domaine.
4. Calculer f_a'.
5. On pose sur D, $g_a(x) = \ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}$.
 a) Dresser le tableau de variations de g_a et montrer qu'elle admet un minimum noté m.
 b) Pour quelle valeur α de a ce minimum est il nul ?
 c) Montrer que si $a > \alpha$ alors f_a est strictement croissante
 d) On suppose $a \in]0, \alpha[$, montrer que f_a' s'annule en deux points x_1, x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$ (on ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes de x_1 et x_2).
 Donner alors le tableau de variations de f_a.
6. Étudier les position relatives des différentes courbes f_a.
7. Tracer sur le même graphique qu'en partie I la courbe représentative de f_1.