DS 5 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.
On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1. Dénombrement sur une face de Rubik's Cube

On cherche dans cet exercice à compter le nombre de possibilités pour colorier une face de Rubik's Cube. On rappelle qu'une face comporte 9 carrés, qui peuvent chacun prendre une des 6 couleurs suivantes : bleu, rouge, orange, jaune, vert ou blanc.
On considère que tous les coloriages sont possibles .

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles au total ?
2. Combien y a-t-il de coloriages avec au moins un carré bleu ?
3. Combien y a-t-il de coloriages avec exactement un carré bleu ?
4. Soit $k \in [\![0, 9]\!]$. Combien y a-t-il de coloriages avec exactement k carrés bleus ? Recalculer à l'aide de ce résultat le nombre total de coloriages possibles.
5. On souhaite dans cette question calculer de deux façons différentes le nombre de coloriages comportant exactement deux couleurs.
   a) Combien a-t-on de possibilités pour choisir les deux couleurs ?
   b) On suppose que les deux couleurs sont choisies. Combien de coloriages peut-on réaliser avec ces deux couleurs uniquement ? En déduire le nombre de coloriages comportant exactement deux couleurs.
   c) On veut retrouver ce résultat par une autre méthode. On suppose à nouveau que les deux couleurs sont choisies, par exemple bleu et rouge. Combien y a-t-il de coloriages comportant exactement $k \in [\![1, 8]\!]$ carrés bleus et $9 - k$ carrés rouges ? En déduire le nombre de coloriages comportant exactement deux couleurs, et vérifier que l'on retrouve bien le résultat de la question précédente.

Exercice 2. Intégrales

1. Calculer :

   a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ en posant $u = \cos(t)$

2. Déterminer une primitive de la fonction $f : t \mapsto (1-t^2)e^t$. On pourra réaliser des intégrations par parties.

Exercice 3. Une suite

On considère la suite (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{a_n - 2} \end{cases}$

1. **Python**
   a) Écrire le une fonction `suite_a(n)` prenant comme argument un entier n et renvoyant le terme a_n.
   b) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 6$; écrire une fonction `seuil(e)` prenant comme argument un flottant e et renvoyant le rang du premier terme de la suite vérifiant $|a_n - 6| \leq e$.
2. Calculer a_1 et a_2.
3. Déterminer deux réels c et d tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = c + \dfrac{d}{a_n - 2}$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 4$.
5. On pose pour tout entier n, $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, montrer que cette suite est bien définie.
6. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{b_n}{2}$$
7. En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
8. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 4. Problème : d'après Agro-Véto 2019

Partie I : Contexte

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On aimerait déterminer le terme général d'une suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Premier exemple

On suppose dans toute cette partie que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

   Montrer qu'il existe exactement trois valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_3$ est non-inversible. Préciser ces valeurs.
   On pourra remarquer que le polynôme $X^3 - 2X^2 - X + 2$ possède 1 comme racine et le factoriser sous la forme $(X-1)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma)$, avec des coefficients α, β, γ à déterminer.

3. On note dans la suite $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que le système linéaire $AX = X$ équivaut au système linéaire $(A - I_3)\,X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
   Montrer que ce système admet une infinité de solutions, et déterminer l'ensemble de ses solutions.
   Parmi ces solutions, déterminer alors l'unique solution telle que $z = 1$.

   b) De même qu'à la question précédente, montrer que le système linéaire $AX = -X$ admet une infinité de solutions, et déterminer l'ensemble de ses solutions.
   Parmi ces solutions, déterminer l'unique solution telle que $z = 1$.

   c) Soit $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX_3 = \lambda X_3$.

4. On construit à présent une matrice P de sorte que chaque colonne de P soit solution d'un des systèmes linéaires considérés dans les questions précédentes. On choisit de définir P ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Montrer que P est inversible, et déterminer P^{-1}.

   b) Déterminer une matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.

   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Application : Soit u une suite vérifiant $u_0 = u_1 = 0, u_2 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

   a) On souhaite réaliser en Python une fonction suiteU(n) qui prend en argument un entier $n \geqslant 2$, et renvoie la valeur de u_n. Pour cela, on décide de calculer les termes de proche en proche, en stockant au fur et à mesure les valeurs obtenues dans une liste U.
   Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il accomplisse cette tâche :

```
def suite_U(n):
    U = [0,0,1]
    for ..........
        U.append(..........)
    return ..........
```

   b) À l'aide des résultats des questions 1 à 4 , déterminer l'expression explicite de (u_n).
   Choisissez judicieusement l'ordre de vos calculs pour éviter d'avoir à calculer A^n en entier.

Partie III : Second exemple

On suppose dans toute cette partie que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Montrer qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_3$ est non-inversible. Préciser ces valeurs.

On admet, pour la suite de l'exercice, qu'il existe une matrice inversible P (que l'on ne cherchera pas à déterminer) telle que la matrice B définie par $B = P^{-1}AP$ vérifie

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. On note D la matrice diagonale de coefficients diagonaux 2,1 et 1 . Vérifier que l'on peut écrire $B = D + N$, où N une matrice telle que $N^2 = 0$ et $DN = ND$.
8. En déduire à l'aide du binôme de Newton une expression de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. (Difficile) Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout entier n, on ait $A^n = 2^n R_1 + R_2 + nR_3$.
   On ne demande pas forcément de calculer explicitement ces matrices !
10. (Difficile) En déduire que si une suite u vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$

alors il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n$$

On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.