

DS 6 – Maths & Info

La calculatrice est interdite.

On pourra admettre une question (en le précisant) pour poursuivre la résolution des exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin.

Exercice 1. Géométrie

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

- Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$
 - Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
 - Déterminer une équation cartésienne du plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
2. Soit $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$.
- Déterminer un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
 - Trouver un réel λ tel que $\vec{v} + \lambda \vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}$.
3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{P}_m : mx + y + (m - 1)z + 2m + 1 = 0$$

- Déterminer $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
- Montrer que l'intersection commune de tous les $\mathcal{P}_m (m \in \mathbb{R})$ est une droite, dont on précisera un vecteur directeur.

Exercice 2. Alcoolémie

La concentration d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans le sang d'une personne ayant absorbé, à jeun (autrement dit $y(0) = 0$), une quantité Q d'alcool vérifie l'équation différentielle : $(E) : Qy(t) + y(t) = \frac{Q}{6}e^{-2t}$, où t est le temps écoulé après ingestion, exprimé en heures.

On suppose qu'une personne ingère la quantité $Q = 24g$ d'alcool.

- Résoudre l'équation différentielle (E).
- Résoudre $e^{-2t} - e^{-t} + 18 > 0$.
- Exprimer en heure le temps qu'il faut pour que la personne (à jeun au début de l'expérience) possède un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5g.L^{-1}$. On répondra à l'aide d'un calcul littéral.

Exercice 3. Une équation d'ordre 2

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $(E) : x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$ sont solutions de (E). (On mettra en valeurs les calculs de f' et f'')
- Réciproquement on considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ et on cherche à montrer qu'elle est bien de la forme précédente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
 - Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et ses dérivées.
 - En déduire que z vérifie l'équation $(E') : z'' - 4z' + 4z = 0$.
 - Résoudre (E') et conclure.

Exercice 4. Problème – Suites

Dans ce problème, on étudie la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

Partie 1 : Convergence de (u_n)

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x - x^2$
2. Étudier le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$.
3. Déterminer tous les réels $l \in \mathbb{R}$ tels que $f(l) = l$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, 1[$.
5. Montrer que (u_n) est décroissante, à l'aide de la fonction g .
6. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite. *Indication : Pour la limite, on utilisera la question 3.*

Partie 2 : Théorème de Césaro

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle, on définit alors la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_n = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$$

7. Montrer que si v est bornée alors c l'est aussi.
8. Démontrer que si v est croissante alors c est croissante.
9. On suppose dans cette question que (v_n) est croissante
 - a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (v_n) converge.
 - b) Démontrer que si (v_n) converge alors (c_n) converge.
 - c) Montrer que l'on a :

$$\forall n > 0 \quad c_n \leq v_n \leq 2c_{2n} - c_n$$

- d) En déduire le théorème de Césaro :

$$(v_n) \text{ converge vers } l \iff (c_n) \text{ converge vers } l$$

Dans la suite, on admet que ce résultat reste vrai si (v_n) est décroissante.

Partie 3 : Recherche d'un équivalent.

On pose pour tout entier n , $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$

10. Montrer que $\lim v_n = 1$
11. Montrer que (v_n) est décroissante.
12. En utilisant la partie 2, montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k\right)$ converge et donner sa limite.
13. Montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right)$$

14. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$