

Corr. qd DS1

Ex 1

① $f(x) = \frac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \times 1 = \frac{1}{2}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$

② $f(x) = x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})} \underset{0}{\sim} x \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} \sim 3\sqrt{3}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3\sqrt{3}$

③ $X = \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} \underset{0}{\sim} X$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \sin(x) \underset{0}{\sim} x$

Ann $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)} \sim \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)} = \frac{1}{6}$

Ex 2 Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on écrit $f(x) = \exp\left[\frac{1}{x^2} \ln(1+\tan(x) - \sin(x))\right]$

f est continue sur ce domaine en tous que comprise de fonctions continues

① On sait que $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, d'où :

$\tan(x) - \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \sin(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} (1 - \cos(x))$
 $\underset{0}{\sim} x \times 1 \times \frac{x^2}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$

En utilisant à nouveau $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$, on obtient

$\ln(1+\tan(x) - \sin(x)) \underset{0}{\sim} \tan(x) - \sin(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$

d'où

$\frac{1}{x^2} \ln(1+\tan(x) - \sin(x)) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc par composition des limites,

on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ f est continue en 0

② $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 + \tan(x) - \sin(x) = +\infty$, Par composition des limites,

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ Il admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$

③ On a montré que $X = \frac{1}{x^2} \ln(1+\tan(x) - \sin(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, en utilisant $e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$

on peut écrire : $f(x) - 1 \sim X \sim \frac{x}{2}$ On peut alors calculer le taux

d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$

④ f est dérivable en 0.

Ex 3 ① $P=0$ est solution de (E). Supposons que $P \neq 0$, et posons $n = \deg P \in \mathbb{N}$

On a alors $\deg P(X^2) = 2 \deg P = 2n$

$\deg((X^2+1)P) = \deg(X^2+1) + \deg P = n+2$

P est solution de E implique donc $2n = n+2$ d'où $n=2$

On pose alors $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on injecte dans (E)

$P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(X^2+1)P = (X^2+1)(aX^2 + bX + c)$
 $= aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$

Pour annuler des coefficients d'un polynôme, on obtient le système :

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+c=b \\ b=0 \\ c=c \end{cases} \Rightarrow a=-c, b=0$$
 d'où $P = a(X^2-1)$

On vérifie alors que $a(X^2-1)$ est solution

En conclusion $\mathcal{Y} = \{P = a(X^2-1), a \in \mathbb{R}\}$

Exercice 4 ① Un rapide calcul donne $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 6X^2 - 2X + 1$

② d'après la question précédente, on pose $P(n)$: $\deg T_n = n$, donc $T_n = 2^{n-1}$

Pour $n=1$ et 2 , $P(n)$ est vérifiée d'après ①

Supposons $P(n)$ vraie au rang n et $n+1$ à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

On écrit alors $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R_{n+1}$ au $\deg R_{n+1} < n+1$

Il vient $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n = 2X(2^n X^{n+1} + R_{n+1}) - T_n$
 $= 2^{n+1} X^{n+2} + 2X R_{n+1} - T_n$

Ainsi $\deg T_{n+2} = n+2$ et $\deg T_{n+1} = 2^{n+1}$

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^* \deg T_n = n, \text{ dan } T_n = 2^{n-1}$

③ d'après la formule de sommation

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

En sommant, on obtient

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

④ On applique la formule précédente avec $a = (n+2)\theta$, $b = \theta$

et $a-b = (n+1)\theta$ $a-b = n\theta$, On obtient alors

$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta) \cos((n+1)\theta)$

⑤ On raisonne par récurrence $P(n) : T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

Pour $n=0$ $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0\theta)$

$n=1$ $T_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1\theta)$

Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies à un certain rang $n \in \mathbb{N}$

$T_{n+2}(\cos \theta) = 2\cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta)$

$= 2\cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$ HR

$= \cos((n+2)\theta)$ Q4

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

⑥ On remarque que $0 = \cos(\frac{\pi}{2})$

d'où $T_n(0) = T_n(\cos(\frac{\pi}{2})) = \cos(n\pi/2)$

S. n est impair $T_n(0) = 0$, si $n = 2p$ est pair $T_n(0) = (-1)^p$

⑦ Soit $\theta \in [0, \pi]$ $\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$

Or comme $\theta \in [0, \pi]$, $k \in [0, n-1]$ et on obtient donc

$\mathcal{S} = \{ \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k \in [0, n-1] \}$

⑧ Soit $x \in [-1, 1]$, il existe alors $\theta \in [0, \pi]$ (θ est même unique)

tel que $x = \cos \theta$. On peut alors écrire

$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \mathcal{S}$

d'où $x \in \{ \cos(\theta_k), k \in [0, n-1] \}$

⑨ La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est injective sur $[0, \pi]$ (car strictement décroissante)

les θ_k sont donc distincts. On a donc obtenu n racines

distinctes du polynôme T_n . On sait de plus que $\deg T_n = n$

On a ainsi déterminé toutes les racines de T_n

⑩ T_n est stricte à racines simples, son coefficients dominant est 2^{n-1} ($n \in \mathbb{N}^*$)

On obtient donc la factorisation :

$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}))$

⑪ $R_n(\cos \theta) = T_n(\cos \theta) - S_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$

⑫ Soit $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos \theta$ et ainsi

$R_n(x) = R_n(\cos \theta) = 0$

$[-1, 1]$ est infini donc R_n admet une infinité de racines.

$R_n = 0$

Et ainsi $T_n = S_n$

Exercice 5 ① (E_1, E_2) forment un système complet d'événements (SCE)

d'après la formule des probabilités totales (FPT), on a

$P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_2)P(E_2)$

$= P(E_2) \times \frac{1}{2} + (1-P(E_2))p$

$= p + (\frac{1}{2}-p)P(E_2)$

② dans cette stratégie, pour tout entier n , $P(E_2) = \frac{1}{2}$

en utilisant la question 1, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N}^* P(E_2) = p + (\frac{1}{2}-p) \frac{1}{2} = \frac{2p+1}{4}$

3a Dans cette stratégie, $P(E_1) = \frac{1}{2}$ et on retrouve

alors le résultat de la question précédente

$P(E_2) = \frac{2p+1}{4}$

b/ Si E_1 est réelle, alors on jouera toujours avec la

pièce équilibrée si et seulement si le premier lancer a donné Face

donc $P(E_1|E_2) = \frac{1}{2}$

Sachant E_2 , le premier lancer doit donner Pile pour que

l'on change de pièce et que l'on joue ensuite avec la pièce équilibrée

donc $P(E_2|E_1) = 1-p$

d'après la FPT en utilisant le SCE (E_1, E_2) on a

$P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_2)P(E_2)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{3-2p}{4}$

③ On utilise alors la question 1, et on a

$P(E_2) = p + (\frac{1}{2}-p)P(E_2)$

$= p + (\frac{1}{2}-p) \frac{3-2p}{4}$

$= \frac{3-4p}{8}$

④ a) Au premier lancer, on retrouve le même combat que pour la

stratégie 1 et 2, d'où $P(E_2) = \frac{2p+1}{4}$

Pour le second lancer, il s'agit de la même stratégie que ②

donc $P(E_2) = \frac{4p+3}{8}$

b) En raisonnant de même qu'en 3b, on peut écrire :

$P(E_{n+2}) = P(E_n)P(E_{n+1}|E_n) + P(E_{n+1}|E_n)P(E_{n+2}|E_n)$

$= P(E_n) \times \frac{1}{2} + (1-P(E_n)) \times p$

$= \frac{1-2p}{2} P(E_n) + 1-p$

On pose alors $a = \frac{1-2p}{2}$ et $b = 1-p$

La suite $e_n = P(E_n)$ est arithmético-géométrique. On cherche alors le

point fixe l de la relation de récurrence :

$l = \frac{1-2p}{2} l + 1-p \Leftrightarrow (1 - \frac{2p+2}{2})l = 1-p$

$\Leftrightarrow l = \frac{2-2p}{3-2p}$

La suite $w_n = e_n - l$ est géométrique de raison $a = \frac{2p-1}{2}$ de premier

terme $w_1 = e_1 - l = \frac{1}{2} - \frac{2-2p}{3-2p} = \frac{-1+2p}{2(3-2p)}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* w_n = (\frac{2p-1}{2})^n \times \frac{-1+2p}{2(3-2p)} = \frac{-1}{3-2p} (\frac{2p-1}{2})^n$

On revient alors à la suite initiale et on obtient

$\forall n \in \mathbb{N}^* e_n = w_n + l = \dots$

et $P(E_n) = p + \frac{1-2p}{2} \left[\frac{1}{3-2p} \left(2(1-p) + \left(\frac{2p-1}{2}\right)^n \right) \right]$

$= \frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \right)$

Or $\frac{2p-1}{2} \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{1}{3-2p}$

Exercice 6 ① Les événements (D_n, L_n) forment un SCE, donc d'après

la FPT $P(D_{n+1}) = P(D_n)P(D_{n+1}|D_n) + P(L_n)P(D_{n+1}|L_n)$

$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{4}l_n$

De même on obtient $l_{n+1} = \frac{1}{2}l_n + \frac{3}{4}d_n$

b) On obtient ainsi pour ce SCE, $P(D_n) + P(L_n) = P(\Omega) = 1$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} d_n + l_n = 1$

③ Notons $L_n = \begin{pmatrix} d_n \\ l_n \end{pmatrix}$ alors $L_{n+1} = A^n L_0$ et on obtient :

$d_n = ((1+2a)^n d_0 + (1-a)^n l_0) \times \frac{1}{2}$ et $l_n = ((2-2a)^n d_0 + (1+a)^n l_0) \times \frac{1}{2}$

et comme $|a| < 1$, en passant à la limite,

$d_n \rightarrow \frac{1}{2} (l_0 + d_0) = \frac{1}{3}$ et $l_n \rightarrow \frac{2}{3} (l_0 + d_0) = \frac{2}{3}$

④ d'où le mélange tend vers un équilibre avec les proportions suivantes

$\frac{1}{3}$ de déteux et $\frac{2}{3}$ de lisses