

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1. (*) Calculer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(3 + x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \tan(x) - \sin(x))^{1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. (*) Expliquer pourquoi f est bien définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, et est continue sur cet intervalle.

2. (*) Étude de la continuité en 0

(a) Donner un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto 1 - \cos(x)$.

(b) En déduire que $\tan(x) - \sin(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$.

(c) Montrer alors que f est continue en 0.

3. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.

(b) Que peut-on en déduire sur la courbe de f .

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^{(+)}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$. (On utilisera $e^X - 1 \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$)

5. Que peut on en déduire sur f .

Exercice 3. (*) On cherche dans cet exercice à déterminer les polynômes P vérifiant :

$$(E): \quad P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

1. Déterminer le degré de P .

2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. (*) Calculer T_2 , T_3 et T_4 .
2. (*) Quel est le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (*) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

4. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2 \cos((n+1)\theta) \cos(\theta)$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
6. Déterminer ainsi $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Résoudre pour $\theta \in [0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$
8. En déduire les racines de T_n sur l'intervalle $[-1, 1]$.
9. Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues? Que peut-on en déduire?
10. Démontrer alors que :

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \right)$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = S_n(\cos(\theta)).$$

On pose de plus : $R_n = T_n - S_n$.

12. Calculer $R_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
13. En déduire $S_n = T_n$.

Exercice 5. On dispose de deux pièces indiscernables. L'une est équilibrée, l'autre est déséquilibrée et donne face avec la probabilité $p > \frac{1}{2}$. On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces à chaque lancer.

Le but de cet exercice est d'étudier plusieurs stratégies et de trouver celle qui permet d'obtenir **Face** avec la plus grande probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

- E_n l'événement : On choisit la pièce équilibrée au n-ième lancer.
- F_n l'événement : On obtient **Face** au n-ième lancer.

1. (*) Soit $n \geq 1$, montrer que

$$P(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P(E_n)$$

2. (*) **Première stratégie** : A chaque lancer, on choisit au hasard une des deux pièces de manière équiprobable.

Montrer que

$$P(F_n) = \frac{2p+1}{4}$$

3. **Deuxième stratégie** : Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces de manière équiprobable. Si on obtient **Face**, on continue d'utiliser cette pièce pour toute la suite du jeu. Sinon, on utilise l'autre pièce pour la suite du jeu.

- (a) (*) Que vaut $P(F_1)$?
- (b) Soit $n \geq 2$, déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_1}(E_n)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_n)$.
- (c) Montrer que :

$$\forall n \geq 2 \quad P(F_n) = \frac{4p^2+3}{8}$$

4. **Troisième stratégie** : Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces de manière équiprobable. Puis à chaque lancer suivant, on utilise la même pièce qu'au lancer précédent si on a obtenu **Face**, sinon, on change de pièce.

- (a) Donner sans justification $P(F_1)$ et $P(F_2)$
 (b) Montrer qu'il existe $(a, b) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 1$:

$$P(E_{n+1}) = aP(E_n) + b$$

- (c) En déduire une expression de $P(E_n)$ en fonction de n .
 (d) Montrer alors que pour tout $n \geq 1$:

$$P(F_n) = \frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

- (e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n)$

Exercice 6. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

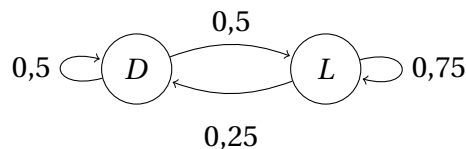
On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2a^n & 1-a^n \\ 2-2a^n & 2+a^n \end{pmatrix}$$

où $a = \frac{1}{4}$

Le glucose admet deux isomères, l'un dextrogyre (c'est-à-dire qui dévie la lumière vers la droite), le dextrose, l'autre lévogyre, le lévulose. Dans une certaine réaction chimique, dite de Pierre Landin, une partie du dextrose se transforme en lévulose et vice-versa.

Précisément, au cours d'une unité de temps, 50% des molécules de dextrose se transforment en lévulose et les 50% restant demeurent sous forme dextrose, tandis que 75% des molécules de lévulose restent sous forme lévulose et que les 25% autres deviennent dextrose.



On choisit une molécule au hasard dans le mélange. On note D_n l'évènement : à l'instant n , cette molécule est du dextrose et L_n : à l'instant n , cette molécule est du lévulose.

On appelle d_n et ℓ_n les proportions de dextrose et de lévulose au temps n dans le mélange. (L'unité de temps est l'heure)

1. (a) (*) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n et ℓ_n , puis ℓ_{n+1} en fonction de d_n et ℓ_n .
 (b) (*) Quelle relation existe-t-il entre d_n et ℓ_n ?

Dans la suite, on note : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ \ell_n \end{pmatrix}$

2. Montrer que $U_n = A^n U_0$
 3. En déduire les limites de d_n et ℓ_n , et montrer qu'elles ne dépendent pas de U_0 .
 4. Que peut-on conclure sur l'évolution du mélange ?