

Interro 11

1. On considère le système linéaire suivant :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y - 2z + t = 0 \\ 3z - 5t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- a) Décrire le plus précisément possible le système (S_1) à l'aide du vocabulaire du cours.
- b) Justifier que (S_1) est compatible, et déterminer son nombre de solutions.
- c) Résoudre (S_1) .

Solution :

- a) Le système (S_1) est un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues (x, y, z, t) . Il est homogène et échelonné.

Il admet deux inconnues principales, x et z , associées aux pivots 1 et 3, et deux inconnues secondaires, y et t .

Il est donc de rang 2.

- b) (S_1) est compatible puisqu'il est homogène. On peut aussi dire qu'il est échelonné et n'admet pas d'équation de la forme $0 = b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

(S_1) est un système échelonné compatible qui admet deux inconnues secondaires, donc il admet une infinité de solutions (avec 2 degrés de liberté).

- c) On a $(S_1) \iff \begin{cases} z = \frac{5t}{3} \\ x = -3y + 2z - t = -3y + \frac{7t}{3} \end{cases}$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (S_1) est $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{7t}{3} - 3y, y, \frac{5t}{3}, t \right) \mid y, t \in \mathbb{R} \right\}$

2. Résoudre le système suivant, en indiquant toutes les opérations élémentaires effectuées :

$$(S_2) \begin{cases} 2a + b - 3c = -2 \\ a + b - c = 2 \\ -3a - b + 5c = -7 \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{aligned} (S_2) \begin{cases} 2a + b - 3c = -2 \\ a + b - c = 2 \\ -3a - b + 5c = -7 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + b - c = 2 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2a + b - 3c = -2 \\ -3a - b + 5c = -7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b - c = 2 \\ -b - c = -6 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2b + 2c = -1 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b - c = 2 \\ -b - c = -6 \\ 0 = -13 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est incompatible, donc il n'a pas de solution ($\mathcal{S} = \emptyset$).