

## Semaine 14 – du 12 au 16 janvier

### I Dénombrements

Notion de cardinal d'un ensemble fini.

Cardinal d'un sous ensemble, du complémentaire. Notion d'ensembles 2 à 2 disjoints, cardinal. Cardinal d'une union de 2 ensembles finis.

Cardinal de :  $E \times F$ ,  $E_1 \times \dots \times E_n$ ,  $E^n$ .

Cardinal de  $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ . Cardinal de  $\mathcal{P}(E)$ .

#### Choix de $n$ objets parmi $p$ :

- avec répétition (remise) et avec ordre ;  $p$ -listes de  $E$  (=  $p$ -uplets)
- sans répétition et avec ordre ;  $p$ -listes de  $E$  sans répétitions.  
Notion de permutation de  $E$  ( $p = n$ ), cardinal de l'ensemble des permutations.
- sans répétition et sans ordre (tirage simultané) ;  $p$ -combinaisons de  $E$ .

### II Matrices (1)

Définitions. Matrices carrées, lignes et colonnes. 0 et  $I_n$ .

#### Opérations matricielles :

Somme et multiplication par un scalaire.

Produit matriciel. Propriétés.

Puissances de matrices carrées et binôme de Newton pour des matrices qui commutent.

Transposition et propriétés.

Matrices inversibles : définition et propriétés opératoires.

Cas des matrices  $2 \times 2$ , déterminant et inverse.

⚠ Le pivot de Gauss et son application au calcul de l'inverse n'est pas au programme de cette semaine, ni le lien avec les systèmes.

### III Python

Algorithmique de base et syntaxe Python (variables, opérations, fonctions, if/elif/else, boucles while, boucles for).

Manipulation de listes.

Tracé de courbes à l'aide des modules `matplotlib.pyplot` et `numpy`.

Boucles imbriquées, calculs de sommes et produits.

Manipulation de chaînes de caractères.

#### Les essentiels

1. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Donner le cardinal du produit cartésien  $E \times F$ , de l'ensemble des applications  $\mathcal{F}(E, F)$  et de l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$ . Donner **l'idée de la preuve** pour ces deux derniers résultats.
2. Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Donner le nombre de manière qu'il y a de choisir  $p$  éléments parmi  $n$  dans chacun des 3 cas à connaître, et donner un exemple au choix pour illustrer chacun de ces 3 cas.
3. Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Donner le cardinal de :
  - L'ensemble des applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$
  - L'ensemble des applications injectives de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$
  - L'ensemble des applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$
4. Donner la définition de la transposition et celle du produit matriciel. On précisera soigneusement les tailles de toutes les matrices.
5. Donner la définition de matrice inversible, et énoncer le théorème qui donne l'inverse dans le cas des matrices  $2 \times 2$ .

6. Calculer les puissances de la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  à l'aide du binôme de Newton (on n'oubliera pas de préciser les hypothèses nécessaires!).