Chapitre 21 – Intégration (2)

Dans tout le chapitre, sauf mention explicite du contraire, on travaille avec une fonction f **continue** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

I Construction de l'intégrale sur un segment

La définition de l'intégrale que nous adoptons en BCPST est fondée sur la notion d'aire. Il existe de multiples façons de définir l'intégrale d'une fonction (les plus courantes sont l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue). Toutes ces définitions coïncident dans le cas des fonctions continues.

1. Fonctions positives

Définition

Soient $a, b \in I$, $a \leq b$. On suppose que f est **positive** sur $[a, b]$.

On appelle **intégrale de** f **sur** $[a, b]$, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ la valeur de **l'aire** de la partie du plan délimitée par :

- la courbe $\mathcal{C}_f$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

Il s'agit donc de la notion intuitive d'**aire sous la courbe**.

Illustration :

Remarque. 1. Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, la variable t est muette et peut être remplacée par n'importe quelle lettre qui ne soit pas déjà utilisée.

2. On peut utiliser directement cette définition pour calculer l'intégrale d'une fonction affine positive sur un segment (aire d'un trapèze rectangle).

Exemple

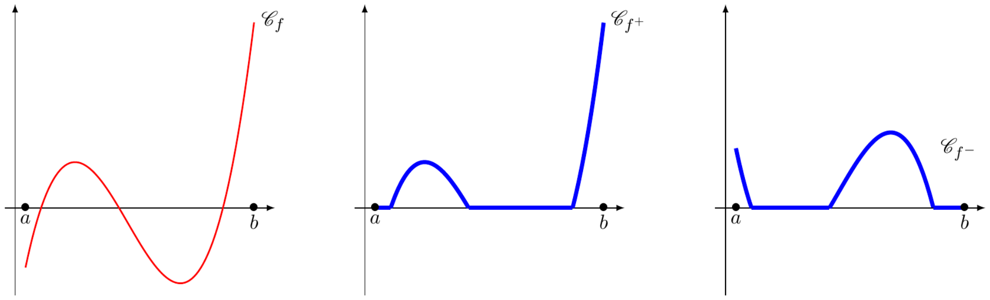
- Avec $f(t) = 2$ sur $[1, 4]$:
- Avec $f(x) = x$ sur $[2, 3]$:
- Avec $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ sur $[-3, 3]$:

2. Fonctions de signe quelconque

Définition

On définit la **partie positive** et la **partie négative** de f comme étant les fonction f^+ et f^- définies sur I par : Autrement dit :

- Si $f(x) \geq 0$, alors et .
- Si $f(x) \leq 0$, alors et .



Propriété

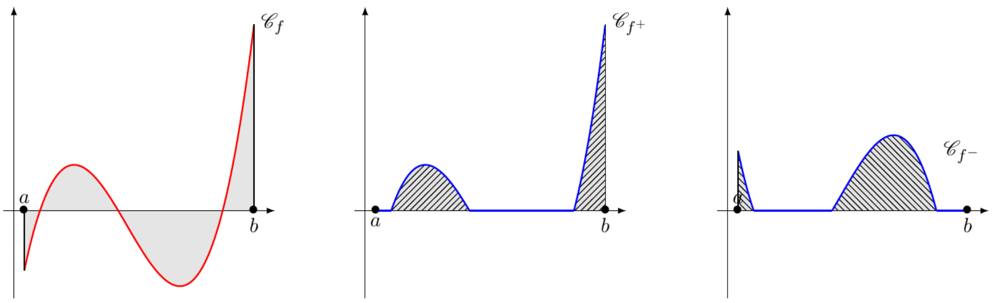
1. Si f est continue sur I, alors les fonctions f^+ et f^- sont continues sur I.
2. Les fonctions f^+ et f^- sont à valeurs positives.
3. $\forall x \in I, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

Démonstration. □

Définition

Soient $a, b \in I$, $a \leq b$. On définit **l'intégrale de f sur** $[a, b]$ comme étant le réel :

Remarque. Avec cette définition, l'intégrale de f est **l'aire algébrique** sous la courbe de f : les portions de courbes en dessous de l'axe des abscisses **comptent négativement**.



Exemple

Calculons l'intégrale de la fonction $f : x \mapsto 2x - 4$ sur le segment $[0, 3]$.

- Cette fonction est positive sur ....et négative sur ....
- On a donc $\displaystyle\int_0^3 f(t)dt =$
- D'où finalement :

3. Ordre des bornes

Définition

Soient $a, b \in I$ avec $a > b$. On définit l'intégrale de f entre a et b par :

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Exemple

- $\displaystyle\int_3^0 (2t - 4)dt =$
- Montrons que pour tout $C \in \mathbb{R}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b Cdt = C(b - a)$.

  On sait que c'est vrai pour $C \geq 0$ et $a \leq b$ d'après la formule de l'aire d'un rectangle.

  - Si $C < 0$ et $a \leq b$, alors
  - Et si $C \in \mathbb{R}$ quelconque et $a > b$, alors

  Dans tous les cas, on a bien $\displaystyle\int_a^b Cdt = C(b - a)$.

II Sommes de Riemann

Les fonctions dont on est capable de déterminer l'aire sous la courbe sont pour l'instant rares. Et même avec les notions que nous verrons par la suite (primitives) on n'est pas toujours capable de déterminer l'aire sous la courbe d'une fonction.

On va ici essayer de calculer de façon approchée l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$. L'idée est de remplacer ce domaine par une **réunion de rectangles**.

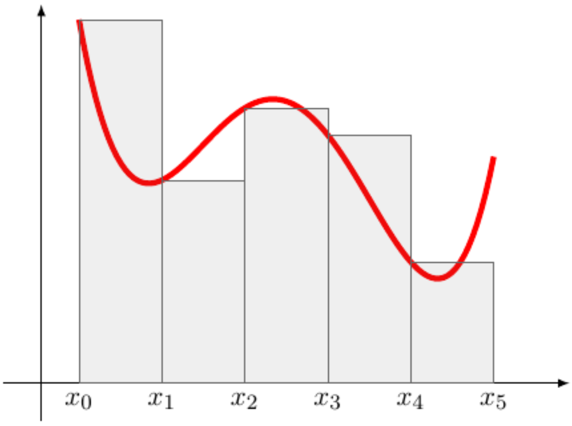
Pour cela, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur. On définit alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le point $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on a par exemple : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt = \frac{b-a}{n} f(x_k)$, et donc :

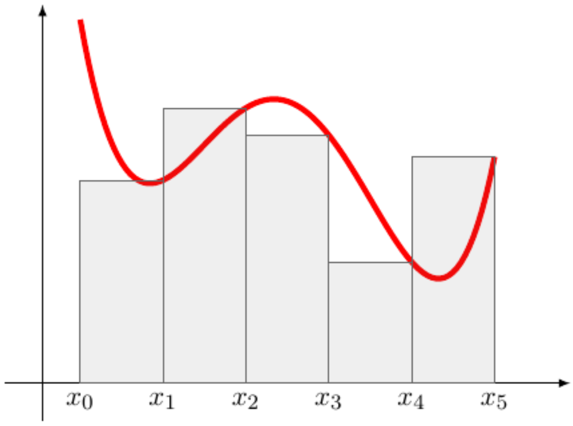
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Dans la formule ci-dessus, on a approché l'aire sous la courbe par l'aire du rectangle dont la hauteur est $f(x_k)$, c'est-à-dire le rectangle qui croise la courbe **à gauche**. On peut faire de même **à droite**, avec : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \approx \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$, et alors :

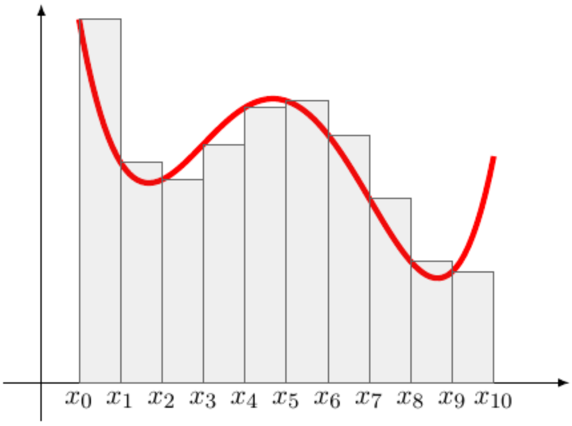
$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$



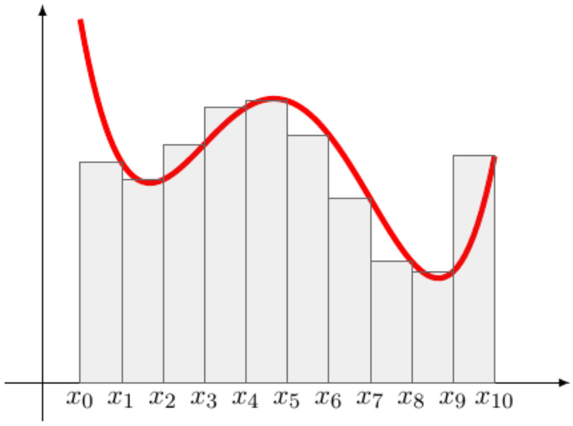
Rectangles à gauche avec $n = 5$



Rectangles à droites avec $n = 5$



Rectangles à gauche avec $n = 10$



Rectangles à droites avec $n = 10$

Graphiquement, on peut penser que plus n est grand, plus la somme des aires des rectangles est proche de la valeur de l'intégrale cherchée. Ce n'est pas vrai pour toutes les fonctions, mais dans le cas des fonctions continues, tout se passe pour le mieux !

Théorème

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad =$$

Les sommes intervenant ci-dessus sont appelées des **sommes de Riemann**.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Alors :

Remarque. C'est ce corollaire qu'on utilise le plus souvent en pratique. Il sert à **calculer la valeur de la limite d'une suite** lorsqu'on arrive à l'identifier comme une somme de Riemann.

Exemple

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

III Propriétés de l'intégrale

1. Chasles et linéarité

Proposition (*Relation de Chasles*)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a, b, c \in I$. Alors :

$$\int_a^c f(t)dt \quad = \quad \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Démonstration.

- On suppose d'abord que f est positive.
  - Si $a \leq b \leq c$, c'est une conséquence directe de ....
  - Si $a \leq c \leq b$, on a :
  - On procède de même si $b \leq a \leq c$.
  - On a traité tous les cas où $a \leq c$. Si $a > c$, on a :
- Enfin, si f est de signe quelconque :

□

Proposition (*Linéarité de l'intégrale*)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\, dt \quad = \quad \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Démonstration. On passe par les sommes de Riemann. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\lambda f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)=\lambda\times\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad + \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

2. Positivité et croissance

Proposition

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, avec $\boxed{\text{a<b}}$. On a :

1. Si f est positive sur $[a,b]$ $(\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0)$, alors

2. Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ $(\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x))$, alors

3. Si f est positive et *n'est pas la fonction nulle* $(\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) > 0)$, alors

4. Si f est positive et que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, alors

Démonstration.

Exemple

1. Que peut-on dire d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue qui vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$?

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln(t)^n dt$ est décroissante. Que peut-on en déduire quant à sa convergence ?

3. Inégalité triangulaire

Proposition (*Inégalité triangulaire*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{a \leq b}$. Alors :

Démonstration.

4. Valeur moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$. On définit la **valeur moyenne de f sur** $[a, b]$ comme étant le réel :

Remarque. On a $\int_a^b \mu dt = \mu(b-a) = \int_a^b f(t)dt$. Ainsi, la valeur moyenne est la constante qui a la même intégrale que f sur $[a, b]$.

Proposition (*Inégalité de la moyenne*)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$. On note μ la valeur moyenne de f sur $[a, b]$, m le minimum de f sur $[a, b]$ et M son maximum. Alors :

$$m \leq \mu \leq M$$

Démonstration. m et M existent par le théorème des bornes atteintes.
On sait que pour tout $t \in [a, b]$, $m \leq f(t) \leq M$. Ainsi, par .... :

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M dt$$

D'où, en divisant par $b - a > 0$: $$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

Remarque. En pratique, on utilise l'encadrement :

IV Théorème fondamental de l'analyse

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors

Démonstration.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$$

pour F une primitive quelconque de f sur I.