Chapitre 24 – Développements limités

Dans tout le chapitre, sauf mention explicite du contraire, on travaille avec une fonction f définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$.

L'objectif du chapitre est d'approcher une fonction f en un point a, de la manière la plus précise possible. Prenons un exemple.

Exemple

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x^3 - 2x}{x^3 - x^2 + x}$. On cherche à en donner une approximation en 0.
La première chose à faire est de considérer sa limite en 0. On a une forme indéterminée, mais une factorisation par les termes dominants donne aisément que $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$.
On a donc $g(x) \approx -2$ pour x proche de 0. Mais peut-on faire plus précis ?
On va alors chercher une approximation raisonnable de $g(x) + 2$ au voisinage de 0.
On a : $g(x) + 2 = \dfrac{5x^3 - 2x^2}{x^3 - x^2 + x}$. On obtient évidemment que cette quantité tend vers 0 en 0, mais les équivalents nous permettent même d'affirmer que $g(x) + 2 \underset{0}{\sim} -2x$.
On a donc une approximation : $g(x) \approx -2 - 2x$ quand x est proche de 0.
Si on veut faire encore plus précis, on écrit : $g(x)+2+2x = \dfrac{2x^4 + 3x^3}{x^3 - x^2 + x} \underset{0}{\sim} 3x^2$. D'où $g(x) \approx -2-2x+3x^2$.
Et ainsi de suite.

Nous allons formaliser cette idée, qui consiste à obtenir une **bonne approximation $f(x)$ par une fonction polynomiale au voisinage d'un point donné**. Pour pouvoir dire qu'une approximation est « bonne », on va utiliser la notation o.

Rappel. On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0 lorsqu'on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, avec ε une fonction définie au voisinage de x_0, et qui tend vers 0 en x_0.
Lorsque g ne s'annule pas au voisinage de x_0, ceci est équivalent à : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.
On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o\left(g(x)\right)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va donc dire que $f(x)$ est **négligeable** devant x^n au voisinage de 0, et on note $f(x) \underset{0}{=} o(x^n)$, lorsque $\dfrac{f(x)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

I Développement limité à l'ordre n en 0

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre n en** 0 lorsqu'il existe des coefficients $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\text{au voisinage de } 0, \qquad f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + o\left(x^n\right)$$

Remarque.

- Autrement dit, s'il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0, telle que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon(x)x^n$.

- On peut ainsi "remplacer" f par la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ au voisinage de 0, à petit o de x^n près. C'est pratique pour étudier le comportement local de la fonction f, notamment dans la perspective d'obtenir un équivalent ou une limite.

Exemple

1. Avec la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x^3 - 2x}{x^3 - x^2 + x}$ de l'exemple initial, on a, pour tout $x \in: \mathcal{D}_g$:
   $g(x) + 2 + 2x - 3x^2 = \dfrac{5x^4 - 3x^5}{x^3 - x^2 + x} \underset{0}{\sim} 5x^3 = o(x^2)$.
   Ainsi : g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, donné par $g(x) = -2 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{x^{n+1}}{1 - x}$.
   Ainsi : $\dfrac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \dfrac{x}{1 - x}$ où $\dfrac{x}{1 - x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
   Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0, donné par $\dfrac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Proposition (*Unicité du DL*)

Si f possède un développement limité à l'ordre n en 0, alors celui-ci est **unique**.

Démonstration. On suppose que f admet 2 DLs distincts à l'ordre n en 0, donnés par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$.
Prenons r le plus petit entier entre 0 et n qui vérifie $a_r \neq b_r$. On a alors au voisinage de 0 :
$(a_r - b_r)x^r = \sum_{k=r+1}^{n} (b_k - a_k)x^k + o(x^n) = x^r \times \alpha(x)$ où $\alpha(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
En divisant par x^r et en faisant tendre x vers 0, on obtient $a_r - b_r = 0$: c'est absurde. $\square$

II Opérations sur les développements limités

Proposition (*Troncature*)

Si f possède un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à tout ordre inférieur à n, obtenu en **tronquant** le développement limité à l'ordre n.

Exemple

Si $f(x) \underset{0}{=} -x + 2x^2 - \dfrac{x^3}{2} - x^4 + 5x^5 + o(x^5)$, alors $f(x) \underset{0}{=} -x + 2x^2 + o(x^2)$.

Proposition (*Somme*)

Si f et g possèdent tous deux un développement limité à l'ordre n, alors $f + g$ possède un développement limité à l'ordre n, obtenu en sommant les deux développements limités.

Exemple

Si $f(x) \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$ et $g(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, alors
$(f+g)(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)$

Proposition (*Produit*)

Si f et g possèdent tous deux un développement limité à l'ordre n, alors $f \times g$ possède un développement limité à l'ordre n, obtenu en réalisant le produit des deux développements limités et en tronquant à l'ordre n.

Exemple

Avec les fonctions de l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}
(f \times g)(x) &\underset{0}{=} \left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) \times \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
&= 1 \times \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - x \times \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + x^2 \times \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - x^3 \times \Bigg(x \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + x^3 + o(x^3) + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Remarque. On ne garde que les termes correspondant à des puissances inférieures ou égales à l'ordre du DL ! Pas besoin de développer le reste.

Proposition (*Composition*)

Si f et g admettent tous les deux un développement limité à l'ordre n, et que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n, obtenu en réalisant la composition deux deux développement limités, tronquée à l'ordre n.

Exemple

- Soient $f(x) = x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)$ et $g(u) = 1 - u + u^2 + 2u^3 + o(u^3)$. On a bien $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc on peut composer les deux DLs et obtenir :

$$\begin{aligned}
g(f(x)) &= 1 - (x + 2x^2 - x^3) + (x + 2x^2 - x^3)^2 + 2(x + 2x^2 - x^3)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - x - 2x^2 + x^3 + (x^2 + 4x^3 + o(x^3)) + (2x^3 + o(x^3)) + o(x^3) \\
&= 1 - x - x^2 + 7x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

  En ne conservant que les puissances inférieures ou égales à 3.

- On a vu que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admettait un DL à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, donné par $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

  Comme $-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut en déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet également un DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, donné par :
  $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Méthode

Pour réaliser le développement limité d'un quotient $\frac{f}{g}$ à partir de développements limités de f et g :

1. On écrit $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$, de sorte à se ramener au DL de $\frac{1}{g}$.
2. On factorise par le terme dominant de g, (habituellement sa limite $l \in \mathbb{R}^*$), de sorte que le reste tende vers 1 : $\frac{1}{g} = \frac{1}{l} \times \frac{1}{1+\varepsilon}$ où *epsilon* tend vers 0 en 0.
3. On applique le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et on n'oublie pas de multiplier par $\frac{1}{l}$ et par f pour conclure.

Exemple

Soit $f(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = 2 + x - 4x^2 + o(x^2)$. On a alors :
$\frac{f(x)}{g(x)} = (1 - x^2 + o(x^2)) \frac{1}{2(1 + \frac{x}{2} - 2x^2 + o(x^2))}$.
Or $\frac{1}{1 + (\frac{x}{2} - 2x^2 + o(x^2))} = 1 - (\frac{x}{2} - 2x^2) + (\frac{x}{2} - 2x^2)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + 2x^2 + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{9x^2}{4} + o(x^2)$.
D'où : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}(1 - x^2)) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{9x^2}{4}\right) + o(x^2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{9x^2}{4} - x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)$.
Finalement : $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{8} + o(x^2)$.

Proposition (*Primitivation*)

On suppose que f est définie et continue sur un intervalle I contenant 0, et qu'elle admet un DL à l'ordre n en 0 donné par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

Alors toute primitive F de f sur I possède un développement limité à l'ordre $\boxed{n+1}$ en 0, obtenu en **intégrant** celui de f :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple

- Si $f(x) = 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0, et qu'on a F une primitive de f sur un intervalle contenant 0, alors :

  F admet un DL d'ordre 4 en 0, donné par $F(x) = F(0) + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.
- On sait que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $\frac{1}{1+x}$. En intégrant le développement limité obtenu précédemment, comme $\ln(1+0) = 0$, on obtient donc :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = o(x^{n+1}) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Remarque (Corollaire). **Si on sait que f est dérivable** sur un intervalle I contenant 0 **et que** f et f' admettent tous deux des DLs en 0 à l'ordre $n+1$ et n, alors on obtient le développement de f' en dérivant celui de f (terme à terme).

III Existence – Formule de Taylor-Young

On suppose que f est définie sur un intervalle I contenant 0.

Intro :
Supposons qu'on ait $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ au voisinage de 0.

- En faisant tendre x vers 0, on obtient que $f(x) \underset{x\to 0}{\longleftarrow} a_0$, et donc $f(x) = a_0$ et f est continue en 0.
- De plus, pour $x \neq 0$, on obtient $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - a_0}{x} = a_1 + o(1)$. Ainsi, ce taux d'accroissement tend vers a_1 lorsque x tend vers 0.
  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
- Malheureusement, *ce raisonnement ne se généralise pas* aux rangs supérieurs !

Dans l'autre sens :

- Supposons que f est continue (en 0). Alors au voisinage de 0, $f(x) \longrightarrow f(0)$, et donc $f(x) = f(0)+o(1)$: on a un développement limité à l'ordre 0 donné par $a_0 = f(0)$.
- De même, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait simplement dérivable en 0), alors on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)+o(1)$, et donc en multipliant par x : $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.
- Ainsi, f admet un DL à l'ordre 1 en 0, donné par $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.
  Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc on sait que f' admet un DL à l'ordre 1 en 0 donné par $f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x)$.
  Comme f' est continue, on peut intégrer (primitiver) le DL ci-dessus, et obtenir que f admet un DL à l'ordre 2 en 0, donné par $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2} + o(x)$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^3$, le même raisonnement permet d'obtenir $f'(x) = f'(0)+f''(0)x+f^{(3)}(0)\dfrac{x^2}{2}+o(x)$, et donc
  $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\dfrac{x^3}{6}$.
- Et ainsi de suite par récurrence !

Théorème (*Formule de Taylor-Young*)
Soit f une fonction $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur un intervalle } I \text{ contenant } 0}$.
Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, donné par

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Exemple
On sait que la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = e^0 = 1$.
Ainsi, cette fonction admet des DL à tout ordre en 0, donnés par :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Remarque. ⚠ La réciproque tu théorème est fausse pour $n \geq 2$: on peut admettre un DL à l'ordre n en 0 **sans que la fonction** soit de classe $\mathcal{C}^n$!
Par exemple, avec $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$:

- $f(x) = 0 + o(x^2)$ donc f admet un DL à l'ordre 2 en 0
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas deux fois dérivable en 0 : elle n'est pas $\mathcal{C}^2$.

IV DLs usuels - Formulaire

$$\begin{array}{rcll}
e^x & = & 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) & = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n) \\
\sin(x) & = & x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}) & = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}) \\
\cos(x) & = & 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) & = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})
\end{array}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)$$

En particulier pour $\alpha=-1,\ \alpha=\frac{1}{2},\ \alpha=-\frac{1}{2}$ on obtient :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots+(-1)^nx^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1+x} & = & 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times 4}x^2+\frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}x^3+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n+o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} & = & 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times 3}{2\times 4}x^2+\ldots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n+o(x^n)
\end{array}$$

En changeant x en $-x$ on obtient :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1-x} & = & 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times 4}x^2-\frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}x^3-\ldots-\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n+o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1-x}} & = & 1+\frac{1}{2}x+\frac{1\times 3}{2\times 4}x^2+\ldots+\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n+o(x^n)
\end{array}$$

Par intégration :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$$

$$\begin{array}{rcl}
\ln(1-x) & = & -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n) \\
\arctan(x) & = & x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}+o(x^{2n+2})
\end{array}$$

V En un point quelconque ou en $\pm\infty$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f **possède un développement limité à l'ordre** n **en** x_0 lorsqu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{au voisinage de } x_0, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Toutes les propriétés vues précédemment sont encore vraies en remplaçant 0 par x_0 : unicité, opérations, Taylor-Young.
Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle contenant x_0, alors elle admet un DL d'ordre n en x_0, donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

En pratique, on se ramène toujours à 0 **en posant** $x = x_0 + h$**, ie** $h = x - x_0$**.**

En effet, la fonction f possède un DL à l'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ possède un DL à l'ordre n en 0.

Exemple

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage e de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.
   On a, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\ln(e + h) = \ln(e) + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right)$.
   Or on sait que $\ln(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0.
   Ainsi, lorsque h tend vers 0 : $ln(e + h) = \ln(e) + \dfrac{h}{e} - \dfrac{h^2}{2e^2} + \dfrac{h^3}{3e^3} + o(h^3)$.
   Finalement, en posant $x = e + h$, on a au voisinage de e :
   $$\ln(x) = 1 + \frac{(x - e)}{e} - \frac{(x - e)^2}{2e^2} + \frac{(x - e)^3}{3e^3} + o\left((x - e)^3\right)$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction tangente en $\dfrac{\pi}{4}$.

Définition

On appelle **développement limité généralisé au voisinage de l'infini** un développement limité avec des puissances entières **positives ou négatives** de x.
Ils se font en suivant les puissances *décroissantes* de x.

En pratique, on se ramène toujours à 0 **en posant** $h = \dfrac{1}{x}$

Exemple

Développons à l'ordre -2, en $\pm\infty$: $f(x) = \dfrac{x^5+3x^4+2x^2}{x^3+x+1}$.

En mettant en facteur le terme dominant, on obtient $f(x) = \dfrac{x^5\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = x^2\dfrac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$.

On pose alors $h = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$, et on obtient $f(x) = \dfrac{1}{h^2} \times \dfrac{1+3h+2h^3}{1+h^2+h^3}$.

Comme on va diviser par h^2 à la fin, on doit réaliser un développement limité de la fraction à l'ordre 4 et non 2 !

On a $\dfrac{1}{1+h^2+h^3} = 1-(h^2+h^3)+(h^2+h^3)^2+o(h^4)$ puisque les termes suivants donnent des puissances trop élevées.

D'où : $\dfrac{1}{1+h^2+h^3} = 1-h^2-h^3+h^4+o(h^4)$.

Ainsi : $\dfrac{1+3h+2h^3}{1+h^2+h^3} = (1+3h+2h^3)(1-h^2-h^3+h^4+o(h^4)) = 1-h^2-h^3+h^4+3h-3h^3-3h^4+2h^3+o(h^4) = 1+3h-h^2-2h^3-2h^4+o(h^4)$.

Finalement, on a donc $\dfrac{1}{h^2} \times \dfrac{1+3h+2h^3}{1+h^2+h^3} = \dfrac{1}{h^2}+\dfrac{3}{h}-1-2h-2h^2+o(h^2)$.

Et donc en revenant à $x = \dfrac{1}{h}$:

$$f(x) = x^2+3x-1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

VI Applications

- Limite :
  La limite d'une fonction en x_0 correspond au terme d'ordre 0 dans le DL.
- Équivalent :
  Un équivalent simple en x_0 est donné par le premier terme non nul du DL en x_0.
- Équation de la tangente et position relative de la tangente et de la courbe :
  Les deux premiers termes du DL correspondent à l'équation de la tangente. Le signe du premier terme non nul qui suit donne la position relative de la courbe et de la tangente (au voisinage du point considéré).
- Asymptotes obliques :
  On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est **asymptote** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ lorsque $f(x)-(ax+b) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.
  On peut souvent obtenir une asymptote et sa position relative par rapport à la courbe en réalisant un DL généralisé en $\pm\infty$.