

I Logique élémentaire

Exemple 1

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{non}(|x| \leq 1)$ est l'assertion :
- Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 - a) $\cos$ est croissante sur $\mathbb{R}$
 - b) $\text{non}(\cos \text{ est décroissante sur } \mathbb{R})$
 - c) $(\exp \text{ est positive sur } \mathbb{R}) \text{ ou } (\pi \in \mathbb{Z})$
 - d) $(\sin \text{ est une fonction impaire}) \text{ ou } (2 > -5)$
 - e) $(\ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \text{ et } (0 \in \mathbb{R}_+^*)$
 - f) $(3^{-2} > 0) \text{ et } (\text{non}(\exp \text{ est une fonction impaire}))$

Exemple 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a) Pour un réel x quelconque, on a $x > 1 \implies x^2 > 1$
- b) Pour un réel x quelconque, on a $x^2 > 1 \implies x > 1$
- c) Paris est la capitale de l'Inde $\implies$ Paris est la capitale du Mexique

Exemple 3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la négation des assertions suivantes :

- a) x est irrationnel ou x est strictement négatif :
- b) $x \in \mathbb{Z}$ et $x \geq \pi$:
- c) $0 < x \leq 2$:
- d) $x \in \mathbb{N} \implies x > 3$:

II Vocabulaire des ensembles

Exemple 4

- $\{1, 3, 4\} \times \{0, 3\} = \dots\dots\dots$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (x, y) de réels. On l'assimile au plan cartésien (x et y sont alors les coordonnées) et on note $\mathbb{R}^2$ à la place de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est l'ensemble des couples du type
Représentation :

Exemple 5

On peut définir $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et de manière similaire $\mathbb{R}^n$ pour tout entier $n \geq 1$.
Donner trois éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^4$, et un élément de l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \times]2, 3[$.

Exemple 6

- a) $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$ est l'ensemble des
- b) Pour A, B deux ensembles, on a $A \setminus B = \dots\dots\dots$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0\} = \dots\dots\dots$ d) $\mathbb{R}^3 = \dots\dots\dots$
- e) $\mathbb{Q} = \dots\dots\dots$

III Quantificateurs

Exemple 7

- L'assertion " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ " est vraie/fausse.
Sa négation s'écrit :
- L'assertion " $\exists a \in \mathbb{N}, 2^a$ est divisible par 3" est vraie/fausse.
Sa négation s'écrit :
- L'assertion suivante est vraie/fausse : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
Sa négation s'écrit :

Exemple 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec les assertions suivantes avec les symboles mathématiques :

- f ne prend que des valeurs supérieures ou égales à 3 :
- 2 a un antécédent par f :
- f est une fonction paire :
- f est constante :

IV Raisonnements

1. Prouver une assertion avec un quantificateur

Méthode (*Prouver un "∀"*)

Pour prouver une assertion du type $(\forall x \in E, A(x))$:

- On prend un élément x de E quelconque, en écrivant "Soit $x \in E$ ".
- On montre que $A(x)$ est vraie.

Méthode (*Prouver un "∃"*)

Le plus souvent, pour prouver une assertion du type $(\exists x \in E, A(x))$:

On cherche à exhiber ou construire un élément x de E qui vérifie $A(x)$.

Exemple 9

On veut montrer l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists a \in \mathbb{N}^*, ax \in \mathbb{Z}$.

2. Prouver une implication

Méthode (*Raisonnement direct*)

Pour prouver l'implication $A \implies B$, le plus souvent :

- On suppose que A est vraie ;
- On montre qu'alors B est aussi vraie.

Méthode (*Raisonnement par contraposée*)

Pour prouver l'implication $A \implies B$, il est parfois plus simple de **prouver sa contraposée** $(\text{non } B) \implies (\text{non } A)$, auquel cas :

- On suppose que B est fausse ;
- On montre qu'alors A est aussi fausse.

Exemple 10

Montrons que pour tout entier n , si n^2 est pair, alors n est pair, i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}, (n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair})$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer l'implication $n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$, par **contraposée**.

On va donc plutôt montrer que $n \text{ impair} \implies n^2 \text{ impair}$.

On suppose que n est impair. On peut alors écrire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Mais alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. n^2 est bien impair.

D'où l'implication : $n^2 \text{ pair} \implies n \text{ pair}$. On l'a montré pour $n \in \mathbb{Z}$ quelconque, donc l'assertion voulue est bien vraie.

3. Prouver une équivalence

Méthode (*Double implication*)

Pour prouver l'équivalence $A \iff B$, on procède souvent par double-implication, c'est-à-dire qu'on prouve séparément :

- le "sens direct" $A \implies B$
- le "sens indirect" $B \implies A$ (l'implication réciproque).

Pour chacun des deux sens, on peut choisir de raisonner par contraposée si c'est plus simple !

Méthode (*Équivalences successives*)

Pour prouver l'équivalence $A \iff B$, on peut parfois plus simplement raisonner par équivalences successives : on part de A , qu'on transforme en assertions équivalentes, jusqu'à arriver à B .

C'est par exemple ce qu'on fait quand on résout des équations et inéquations !

Exemple 11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ On veut montrer l'équivalence : a et b sont du même signe $\iff (a+b)^2 \geq (a-b)^2$.

On a la chaîne d'équivalences successives :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 \geq (a-b)^2 &\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 \\ &\iff 2ab \geq -2ab \\ &\iff 4ab \geq 0 \\ &\iff ab \geq 0 \\ &\iff a \text{ et } b \text{ ont le même signe}\end{aligned}$$

D'où l'équivalence annoncée.

4. Raisonnement par l'absurde

Méthode (*Le raisonnement par l'absurde*)

On souhaite prouver une assertion A . On peut parfois procéder par d'absurde, c'est-à-dire :

- Supposer "par l'absurde" que A est fausse ;
- Montrer qu'on aboutit alors à une contradiction ;
- En déduire que A est nécessairement vraie.

Exemple 12

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible :

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, et $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Mais alors $2 = \frac{a^2}{b^2}$, et donc $a^2 = 2b^2$.

a^2 est donc pair, et donc l'entier a est pair. On peut écrire $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{Z}$.

On a donc $(2a')^2 = 4a'^2 = 2b^2$, et donc $2a'^2 = b^2$.

Mais alors b^2 est aussi pair, et donc l'entier b est pair.

Comme a et b sont tous les deux pairs, on pouvait simplifier la fraction $\frac{a}{b}$: c'est absurde.

On a abouti à une contradiction, donc le nombre $\sqrt{2}$ est nécessairement irrationnel.

5. Disjonction de cas

Face à une assertion A , on peut décider de séparer les cas en fonction d'une autre condition B , c'est-à-dire considérer l'assertion A en supposant d'abord que B est vraie, puis en supposant que B est fausse. Formellement, on utilise l'équivalence logique entre A et $(A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et non } B)$.

Alphabet grec et notations

Voici la plupart des lettres de l'alphabet grec communément utilisées en cours de maths/physique.

Minuscule	Majuscule	Nom
α		alpha
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ	Θ	théta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda

Minuscule	Majuscule	Nom
μ		mu
ν		nu
ξ		xi
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
φ	Φ	phi
χ		chi (prononcé ki)
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Par ailleurs j'utilise régulièrement les abréviations suivantes :

- **tq.**, au lieu de "tel que"
- **ie.**, pour *id est* qui signifie "c'est-à-dire" en latin
- **eg.**, pour *exempli gratia* qui signifie "pour l'exemple" en latin
- **NB.**, pour *Nota Bene* qui signifie "notez bien" en latin

J'utilise aussi la notation $\square$, qui signale la fin d'une preuve. Cette notation (à l'instar de $\forall, \exists, \implies$) a été démocratisée par [Nicolas Bourbaki](#) célèbre groupe de mathématiciens du début du 20ème siècle. Évitez de l'utiliser dans vos copies, ça pourrait paraître un peu hautain.

Compétences

1. Comprendre les symboles et notations mathématiques :

- Comprendre les symboles logiques $\implies, \iff, \forall, \exists$.
- Passer d'un énoncé en français à une écriture mathématique et réciproquement.
- Maîtriser les notations ensemblistes $\cap, \cup, \overline{A}, B \setminus A, \{x \in E \mid A(x)\}$.

2. Savoir donner la négation d'une assertion.

3. Comprendre un raisonnement.

4. Réaliser parfaitement une récurrence.