Chapitre 0 – Logique et raisonnement

I Logique élémentaire

En mathématiques, on formule des énoncés, appelés des **assertions**, et on cherche les assertions qui sont vraies (et intéressantes). La théorie repose sur des axiomes et des règles de logique, à partir desquels on démontre les énoncés, qu'on range souvent en théorème, proposition, corollaire, lemme etc.

Une assertion A peut prendre deux "valeurs logiques" : **Vrai** (1) ou **Faux** (0). Mais jamais les deux !
Dans toute la suite de ce paragraphe, A, B et C sont 3 assertions.

Définition

On définit les assertions suivantes :

- la négation de A, notée (non A), qui est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.
- (A ou B), qui est vraie lorsque l'une (au moins) des deux assertions A, B est vraie, et fausse sinon.
- (A et B), qui est vraie lorsque les deux assertions A, B sont vraies simultanément, et fausse sinon.

Exemple

- Soit $x \in \mathbb{R}$. non$(|x| \leq 1) = (|x| > 1)$.
- Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
  - a) cos est croissante sur $\mathbb{R}$
  - b) non (cos est décroissante sur $\mathbb{R}$)
  - c) (exp est positive sur $\mathbb{R}$) ou $(\pi \in \mathbb{Z})$
  - d) (sin est une fonction impaire) ou $(2 > -5)$
  - e) (ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) et $(0 \in \mathbb{R}_+^*)$
  - f) $(3^{-2} > 0)$ et (non(exp est une fonction impaire))

En Python :

Une assertion est représentée en mémoire par une **variable booléenne** (du type `bool`), qui peut prendre la valeur `True` ou la valeur `False`
Les fonctions logiques Non, Ou et Et existent en Python, et s'écrivent respectivement `not`, `or` et `and`.

Remarque. On utilise parfois des tables logiques, qui déterminent la valeur logique d'une assertion en fonction des valeurs logiques de chacune des variables qui interviennent. Les tables logiques de Non, Ou et Et sont très simples :

A	0	1
non A	1	0

A ou B :

A \ B	0	1
0	0	1
1	1	1

A et B :

A \ B	0	1
0	0	0
1	0	1

Définition (*Implication*)

On définit l'assertion "A implique B", notée $A \implies B$, qui est vraie sauf lorsque A est vraie mais B est fausse.
C'est en fait logiquement équivalent à l'assertion $(\text{non } A)$ ou B.

A \ B	0	1
0	1	1
1	0	1

Exemple

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Pour tous les réels x, on a $x > 1 \implies x^2 > 1$

b) Pour tous les réels x, on a $x^2 > 1 \implies x > 1$

c) Paris est la capitale de l'Inde $\implies$ Paris est la capitale du Mexique

Remarque. Le fait que $A \implies B$ soit vrai ne veut pas dire que B est vrai !
Si A est faux, alors $(A \implies B)$ est vrai quelle que soit l'assertion B : en partant de quelque de chose de faux, on peut arriver à tout et n'importe quoi !

Définition (*Équivalence*)

On définit l'assertion "A équivaut à B", notée $A \iff B$, comme étant l'assertion $(A \implies B)$ et $(B \implies A)$.
Elle est vraie lorsque A et B ont la **même valeur logique**, et fausse sinon.

A \ B	0	1
0	1	0
1	0	1

Propriété

Combinons ces fonctions logiques. On a :

- $\text{non}(\text{non } A) = A$
- $\text{non}(A \implies B) = A \,\text{et}(\text{non } B)$
- $A \,\text{et}(B \,\text{ou}\, C) = (A \,\text{et}\, B) \,\text{ou}(A \,\text{et}\, C)$
- $\text{non}(A \,\text{ou}\, B) = (\text{non } A) \,\text{et}(\text{non } B)$
- $\text{non}(A \,\text{et}\, B) = (\text{non } A) \,\text{ou}(\text{non } B)$
- $A \,\text{ou}(B \,\text{et}\, C) = (A \,\text{ou}\, B) \,\text{et}(A \,\text{ou}\, C)$

On dit que le "et" est distributif sur le "ou" et que le "ou" est distributif sur le "et".

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la négation des assertions suivantes :

a) x est irrationnel ou x est strictement négatif

b) $x \in \mathbb{Z}$ et $x \geq \pi$

c) $0 < x \leq 2$

d) $x \in \mathbb{N} \implies x > 3$

Vocabulaire

On considère l'assertion $A \implies B$. Alors :

- Sa **réciproque** est l'assertion $B \implies A$.
- Sa **contraposée** est l'assertion $(\text{non } B) \implies (\text{non } A)$.

Proposition

Une implication est **logiquement équivalente à sa contraposée** : elles ont la même valeur logique.

Démonstration. On a vu que $A \implies B \;=\; (\text{non } A)$ ou B.
Ainsi, la contraposée $(\text{non } B) \implies (\text{non } A)$ s'écrit aussi : $(\text{non}(\text{non } B))$ ou$(\text{non } A)$, c'est-à-dire B ou$(\text{non } A)$, et donc exactement $(\text{non } A)$ ou B. □

⚠ Une implication et sa *réciproque* n'ont **aucun rapport** a priori !

II Vocabulaire des ensembles

On admet l'existence des ensembles comme collections d'objets.

Définition

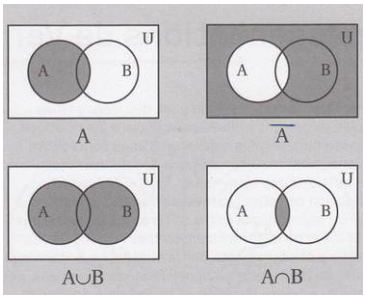
Soit E et F deux ensembles.

- On dit que x appartient à E lorsque x est un élément de E, et on note $x \in E$.
- On dit que F est inclus dans E, ou encore que F est un sous-ensemble (ou une partie) de E, si tous les éléments de F sont des éléments de E. On note alors $F \subset E$.

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On définit :

- le **complémentaire de A (dans E)**, noté $\overline{A}$, comme étant l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas des éléments de A.
- la **réunion de A et B**, notée $A \cup B$, comme étant l'ensemble des éléments de E qui sont (au moins) dans A **ou** dans B.
- l'**intersection de A et B**, notée $A \cap B$, comme étant l'ensemble des éléments de E qui sont (à la fois) dans A **et** dans B.
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$, qui se lit "$A$ **privé de** B.



On a les mêmes propriétés que les opérateurs logiques "et" et "ou" :

Propriété

Soient, A, B et C des parties d'un ensemble E. On a :

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

En particulier, $\cup$ est distributive sur $\cap$, et $\cap$ est distributive sur $\cup$.

Remarque. On a aussi des propriétés de symétrie ($A \cup B = B \cup A$) et d'associativité :
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$. Ces propriétés sont valables aussi pour $\cap$, "et" et "ou".
Cela permet de définir une union (ou intersection) d'un nombre quelconque de parties. Ainsi, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont toutes des parties de E pour $n \geq 1$ un entier, on peut définir l'union de toutes ces parties $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et leur intersection $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Définition

Soient E et F deux ensembles. On définit le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, comme étant l'ensemble des couples (x, y) constitués d'un élément de E suivi d'un élément de F.

Exemple

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (x, y) de réels. On l'assimile au plan cartésien (x et y sont alors les coordonnées) et on note $\mathbb{R}^2$ à la place de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $[0, 1] \times [0, 1]$ peut être représenté par un carré du plan cartésien.
- $\mathbb{Z} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ peut être représenté par une collection infinie de segments verticaux de hauteur 1, centrés sur l'axe des abscisses. C'est l'ensemble des couples du type (n, x) ou n est un entier et x un réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

On peut étendre cette définition à un nombre fini quelconque d'ensembles.

Définition

Soient $n \geq 2$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. On définit leur produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ comme étant l'ensemble constitué des familles ordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ telles que $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$.
On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est un **n-uplet**, et on la note parfois $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ou $(x_i)_{x \in [\![1,n]\!]}$.

Exemple

On peut par exemple définir $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et de manière similaire $\mathbb{R}^n$ pour tout entier $n \geq 1$.
On a $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n),$ où les x_i parcourent $\mathbb{R}\}$

Notation

Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion logique qui dépend de l'élément x de E.
Alors l'ensemble des éléments de E tels que $A(x)$ est vrai se note $\{x \in E \mid A(x)\}$.
La barre verticale dans ce contexte se lit "tel que".

Exemple

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ divise } n\}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.

b) Pour A, B deux ensembles, on a $A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0\} = \varnothing$

d) $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$

III Quantificateurs

Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion portant sur les éléments x de E.

Définition

- $\forall x \in E$, $A(x)$ est l'assertion qui est vraie si et seulement si $A(x)$ est vérifiée par **tous** les éléments x de E. Le symbole $\forall$ se lit "pour tout" ou "quel que soit".
- $\exists x \in E$, $A(x)$ est l'assertion qui est vraie si et seulement si $A(x)$ est vérifiée par **au moins un** éléments x de E. Le symbole $\exists$ se lit "il existe".

Remarque. "$\forall$" est à penser comme un "multi-et" et "$\exists$" est à penser comme un "multi-ou".

Remarque. On utilise parfois le symbole $\exists!$, qui se traduit par "il existe un unique".
Par exemple, l'assertion suivante est vraie : $\exists! x \in \mathbb{R}, e^x = 2$.

⚠ Toutes les variables doivent être introduites par une phrase ou un quantificateur.
⚠ Les quantificateurs ne peuvent pas être interchangés, l'ordre importe !
⚠ Issu du programme officiel : « L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. » Ça vaut aussi pour $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.

Propriété

- $\text{non}\,(\forall x \in E, A(x)) \equiv (\exists x \in E, \text{non}\, A(x))$
- $\text{non}\,(\exists x \in E, A(x)) \equiv (\forall x \in E, \text{non}\, A(x))$

La négation d'un "pour tout" est un "il existe" et réciproquement !

Exemple

- L'assertion "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" est vraie. Sa négation s'écrit : "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$" (ce qui est faux).
- L'assertion "$\exists a \in \mathbb{N}, 2^a$ est divisible par 3" est fausse. Sa négation s'écrit : "$\forall a \in \mathbb{N}, 2^a$ n'est pas divisible par 3".
- L'assertion suivante est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$. Sa négation s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$.

IV Raisonnements

En BCPST, la part belle est donnée à l'utilisation directe de méthodes et de techniques, mais les raisonnements ont tout de même une place importante en mathématiques. Dans cette partie, l'objectif est de donner un aperçu des raisonnements principaux qui pourront être utilisés soit en cours, soit pour répondre à une question du type "montrer que" dans une copie.
Soient A et B deux assertions.

1. Les bases

Méthode (*Le syllogisme – ou raisonnement hypothético-déductif*)

Si on sait que l'assertion $(A \Longrightarrow B)$ est vraie et que A est vraie, alors B est vraie.
C'est par exemple ce qu'on fait quand on applique un théorème. Les hypothèses sont vérifiées et le théorème est vrai, donc on peut affirmer que les conclusions du théorème sont vraies dans notre cas.

Exemple

Soit $MNOP$ un carré de côté 1. Montrons qu'on a $MO = \sqrt{2}$.
On sait que MNO est rectangle en N, et le théorème de Pythagore affirme l'implication suivante :
MNO rectangle en $N \Longrightarrow MN^2 + NO^2 = MO^2$.
Ainsi, on peut en déduire que $MN^2 + NO^2 = MO^2$.
Et comme $MO \geq 0$, on obtient $MO = \sqrt{MN^2 + NO^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Méthode (*Prouver un "∀"*)

Pour prouver une assertion du type $(\forall x \in E, A(x))$:

- On prend un élément x de E quelconque, en écrivant "soit $x \in E$".
- On montre que $A(x)$ est vraie.

Méthode (*Prouver un "∃"*)

Le plus souvent, pour prouver une assertion du type $(\exists x \in E, A(x))$:
On cherche à exhiber ou construire un élément x de E qui vérifie $A(x)$.
Pour cela, plusieurs méthodes sont possibles, nous en verrons au cours de l'année.

Exemple

On veut montrer l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists a \in \mathbb{N}^*, ax \in \mathbb{Z}$.
Soit $x \in \mathbb{Q}$. On veut montrer que pour ce x : $\exists a \in \mathbb{N}^*$ tel que $ax \in \mathbb{N}$.
On cherche donc un a convenable. Pour cela, écrivons x sous forme d'une fraction d'entiers :
soient $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ tel que $x = \dfrac{p}{q}$.
On peut supposer que $q > 0$, quitte à transformer p et q en leur opposé. On a donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Mais alors $qx = q\dfrac{p}{q} = p \in \mathbb{Z}$. Ainsi, choisir $a = q \in \mathbb{N}^*$ convient !
• Montrer qu'en échangeant les quantificateurs, on obtient une assertion fausse.

2. Prouver une implication

Méthode (*Raisonnement direct*)

Pour prouver l'implication $A \Longrightarrow B$, le plus souvent :

- On suppose que A est vraie ;
- On montre qu'alors B est aussi vraie.

Méthode (*Raisonnement par contraposée*)

Pour prouver l'implication $A \Longrightarrow B$, il est parfois plus simple de **prouver sa contraposée** (non B) $\Longrightarrow$ (non A), auquel cas :

- On suppose que B est fausse ;
- On montre qu'alors A est aussi fausse.

Exemple

Montrons que pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.
Cela se traduit par l'assertion : $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair).
Soit $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer l'implication n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair, par **contraposée**.
On va donc plutôt montrer que n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.
On suppose que n est impair. On peut alors écrire $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Mais alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. n^2 est bien impair.
D'où l'implication : n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair. On l'a montré pour $n \in \mathbb{Z}$ quelconque, donc l'assertion voulue est bien vraie.

3. Prouver une équivalence

Méthode (*Double implication*)

Pour prouver l'équivalence $A \Longleftrightarrow B$, on procède souvent par double-implication, c'est-à-dire qu'on prouve séparément :

- le "sens direct" $A \Longrightarrow B$;
- le "sens indirect" $B \Longrightarrow A$ (l'implication réciproque).

Pour chacun des deux sens, on peut choisir de raisonner par contraposée si c'est plus simple !

Méthode (*Équivalences successives*)

Pour prouver l'équivalence $A \Longleftrightarrow B$, on peut parfois plus simplement raisonner par équivalences successives : on part de A, qu'on transforme en assertions équivalentes, jusqu'à arriver à B.
C'est par exemple ce qu'on fait quand on résout des équations et inéquations !

Exemple

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ On veut montrer l'équivalence : a et b sont du même signe $\Longleftrightarrow$ $(a+b)^2 \geq (a-b)^2$.
On a la chaîne d'équivalences successives :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 \geq (a-b)^2 &\Longleftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2 \\ &\Longleftrightarrow 2ab \geq -2ab \\ &\Longleftrightarrow 4ab \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow ab \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow a \text{ et } b \text{ ont le même signe}\end{aligned}$$

D'où l'équivalence annoncée.

4. Quelques raisonnements classiques

Méthode (*Le raisonnement par l'absurde*)

On souhaite prouver une assertion A. On peut procéder par d'absurde, c'est-à-dire :

- Supposer "par l'absurde" que A est fausse ;
- Montrer qu'on aboutit alors à une contradiction ;
- En déduire que A est nécessairement vraie.

Exemple

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors on peut écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, et $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
Mais alors $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, et donc $a^2 = 2b^2$.
a^2 est donc pair, et donc l'entier a est pair. On peut écrire $a = 2a'$ avec $a' \in \mathbb{Z}$.
On a donc $(2a')^2 = 4a'^2 = 2b^2$, et donc $2a'^2 = b^2$.
Mais alors b^2 est aussi pair, et donc l'entier b est pair.
Comme a et b sont tous les deux pairs, on pouvait simplifier la fraction $\dfrac{a}{b}$: c'est absurde.
On a abouti à une contradiction, donc le nombre $\sqrt{2}$ est nécessairement irrationnel.

Méthode (*La disjonction de cas*)

Formellement, ce raisonnement par du constat que quelles que soient les assertions A et B, on a équivalence logique entre A et $(A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et non } B)$.
Pour prouver A, on peut alors décider de séparer les cas en fonction de B :

- On suppose que B est vrai et on prouve A dans ce cas ;
- On suppose à l'inverse que B est faux et on prouve A dans ce cas.

Exemple

On veut résoudre l'inéquation $|x| \leq 2x - 1$ d'inconnue x réel, ce qui correspond à trouver les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'assertion $A(x)$: "$|x| \leq 2x - 1$" est vraie.
Pour "se débarrasser" de la valeur absolue, on réalise une disjonction de cas, en séparant le cas où $x \geq 0$ et le cas où $x < 0$.

- Si $x \geq 0$, alors l'inéquation se réécrit $x \leq 2x - 1$, c'est-à-dire $x \geq 1$.
- Si $x < 0$, alors l'inéquation se réécrit $-x < 2x - 1$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{3}$.
  C'est impossible lorsque $x < 0$, donc il n'y a aucune solution dans ce cas.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = [1; +\infty[$.

Méthode (*La récurrence simple*)

Soit P_n une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$, par récurrence (simple) :

1. **Initialisation :** On montre que l'assertion P_0 est vraie.
2. **Hérédité (ou "itération") :** On fixe $n \geq 0$, et on suppose que P_n est vraie. Sous cette hypothèse ("de récurrence", HR), on montre que P_{n+1} est aussi vraie.

Exemple

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n < 2^n$.
Pour tout entien n, on considère l'assertion $n < 2^n$.

- **Initialisation :** P_0 s'écrit : $0 < 2^0 = 1$, ce qui est vrai.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 0$. On suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire que $n < 2^n$. Montrons que $n + 1 < 2^{n+1}$.
  On a $n + 1 < 2^n + 1$. Or $1 < 2^n$ donc $n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. D'où l'hérédité.

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$.

Remarque. L'initialisation se fait parfois à $n = 1$ au lieu de $n = 0$, ou même parfois avec un autre entier n_0. Dans ce cas, on fixe $n \geq n_0$ dans l'hérédité, et on conclut que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Méthode (*La récurrence forte*)

Soit P_n une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que l'assertion P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$, par récurrence **forte** :

1. **Initialisation :** On montre que l'assertion P_0 est vraie.
2. **Hérédité (ou "itération") :** On fixe $n \geq 0$, et on suppose que P_0, P_1, ..., P_n sont **toutes** vraies. Sous cette hypothèse, on montre que P_{n+1} est aussi vraie.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui vérifie : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
On veut exprimer le terme général u_n plus simplement.
On a $u_1 = u_0 = 1$, $u_2 = u_0 + u_1 = 2$, $u_3 = 1 + 1 + 2 = 4$, $u_4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$, $u_5 = 16$, etc.
On voudrait donc montrer que pour tout $n \geq 1$, on $u_n = 2^{n-1}$.
Faisons le par récurrence forte, en considérant la propriété P_n : $u_n = 2^{n-1}$.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 = 2^{1-1}$, donc P_1 est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 1$. On suppose que pour tout k entre 0 et n, on a $u_k = 2^{k-1}$. On veut montrer qu'alors $u_{n+1} = 2^n$.
  On a $u_{n+1} = u_0 + \ldots + u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = 1 + 2^n - 1 = 2^n$.
  D'où l'hérédité !

On en déduit par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$.

Remarque (La récurrence double). Parfois, on a besoin des deux "générations précédentes" pour montrer l'hérédité. On procède alors par récurrence **double** : on doit initialiser avec P_0 **et** P_1, puis pour tout $n \geq 0$, montrer que $(P_n \text{ et } P_{n+1}) \Longrightarrow P_{n+2}$ (hérédité).

V Alphabet grec et notations

Voici la plupart des lettres de l'alphabet grec communément utilisées en cours de maths/physique.

Minuscule	Majuscule	Nom
α		alpha
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ	Θ	théta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda

Minuscule	Majuscule	Nom
μ		mu
ν		nu
ξ		xi
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
φ	Φ	phi
χ		chi (prononcé ki)
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Par ailleurs j'utilise régulièrement les abréviations suivantes :

- `tq.`, au lieu de "tel que"
- `ie.`, pour *id est* qui signifie "c'est-à-dire" en latin
- `eg.`, pour *exempli gratia* qui signifie "pour l'exemple" en latin
- `NB.`, pour *Nota Bene* qui signifie "notez bien" en latin

J'utilise aussi la notation $\square$, qui signale la fin d'une preuve. Cette notation (à l'instar de $\forall, \exists, \Longrightarrow$) a été démocratisée par Nicolas Bourbaki célèbre groupe de mathématiciens du début du 20éme siècle. Évitez de l'utiliser dans vos copies, ça pourrait paraître un peu hautain.