

I Rappels de calcul

1. Identités remarquables

À savoir utiliser parfaitement dans les deux sens, pour développer ou factoriser une expression.

Règle de calcul

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\text{IR1}) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\text{IR2}) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(\text{IR3}) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Fractions

Règle de calcul

Pour tous $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$ avec $b, d, k \neq 0$, on a :

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

$$\bullet \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

$$\bullet \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\bullet a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} = \frac{a}{d} \times c$$

$$\bullet \text{ Si } c \neq 0 : \text{ l'inverse de } \frac{c}{d} \text{ est } \frac{d}{c}$$

$$\bullet \text{ Si } c \neq 0 : \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\bullet \frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$$

$$\bullet \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}$$

3. Valeur absolue

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **valeur absolue** de x , notée $|x|$, par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Remarque. • Pour retirer une valeur absolue, il faut *connaître le signe* de ce qui est à l'intérieur.

On peut procéder par disjonction de cas !

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite des réels.

Propriété

Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$\bullet |x| \geq 0$$

$$\bullet |x| = 0 \iff x = 0$$

$$\bullet |x| = |-x|$$

$$\bullet |xy| = |x||y|$$

$$\bullet \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\bullet |x^2| = |x|^2 = x^2$$

4. Puissances, racines

Règle de calcul

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ et pour tous entiers $n, p \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\bullet (xy)^n = x^n \times y^n$$

$$\bullet \left(\frac{x}{y} \right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\bullet x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\bullet x^n \times x^p = x^{n+p}$$

$$\bullet \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$$

$$\bullet (x^n)^p = x^{np}$$

Remarque.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $1^n = 1$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0^p = 0$
- On peut en fait définir a^b pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, par $a^b = \exp(b \ln(a)) = e^{b \ln a}$. Les règles de calcul ci-dessus sont encore vraies !

Rappel. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a}$ est par définition l'unique nombre **positif** dont le carré est égal à a .

Règle de calcul

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$:

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (si $b > 0$)

Et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$

Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la **racine cubique de a** , notée $\sqrt[3]{a}$, comme étant l'unique nombre réel (positif ou négatif!) dont le cube est égal à a .

Règle de calcul

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$
- $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ (si $b \neq 0$)
- $(\sqrt[3]{a})^3 = a = \sqrt[3]{a^3}$

Remarque. • Avec la définition étendue de la puissance a^b , on peut écrire $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

- On peut généraliser et définir la racine n -ième de a , pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
Il s'agit de l'unique réel positif x tel que $x^n = a$.

5. Exponentielle et logarithme népérien

Règle de calcul

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,72$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{xy} = (e^x)^y$

On retrouve les mêmes règles de calcul qu'avec les puissances !

Règle de calcul

Pour tous $x, y > 0$ (attention, $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement!), et tout $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$

Règle de calcul

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$

Fonctions polynômiales de degré 2

Remarque. On a étudié les fonctions polynomiales de degré 0 et 1 en troisième, et de degré 2 en première. On sait donc déjà résoudre des équations et inéquations faisant intervenir ces objets.

Proposition (Rappel : Fonctions polynomiales de degré 2)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On définit le **discriminant** de P par $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'étude de f et de ses racines se fait en fonction du **signe du discriminant**.

Signe de Δ	Racines	Tableau de signe	Factorisation											
$\Delta < 0$	Pas de racine réelle	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de a		Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$					
x	$-\infty$	$+\infty$												
$f(x)$	signe de a													
$\Delta = 0$	Une seule racine "double" $x_0 = \frac{-b}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>s(a)</td><td>0</td><td>s(a)</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	s(a)	0	s(a)	$f(x) = a(x - x_0)^2$			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$											
$f(x)$	s(a)	0	s(a)											
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>s(a)</td><td>0</td><td>s(-a)</td><td>0</td><td>s(a)</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	s(a)	0	s(-a)	0	s(a)	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$										
$f(x)$	s(a)	0	s(-a)	0	s(a)									