

Chapitre 1 – Manipuler les réels

I Rappels de calcul

1. Identités remarquables

À savoir utiliser parfaitement dans les deux sens, pour développer ou factoriser une expression.

Règle de calcul

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\text{(IR1)} \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{(IR2)} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{(IR3)} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Fractions

Règle de calcul

Pour tous $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$ avec $b, d, k \neq 0$, on a :

$$\bullet \quad \frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\bullet \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d} = \frac{a}{d} \times c$$

$$\bullet \quad \text{Si } c \neq 0 : \text{l'inverse de } \frac{c}{d} \text{ est } \frac{d}{c}$$

$$\bullet \quad \text{Si } c \neq 0 : \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$$

$$\bullet \quad \frac{a}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}$$

3. Valeur absolue

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **valeur absolue** de x , notée $|x|$, par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Remarque. • Pour retirer une valeur absolue, il faut *connaître le signe* de ce qui est à l'intérieur.
On peut procéder par disjonction de cas !

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite des réels.

Propriété

Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$\bullet \quad |x| \geq 0$$

$$\bullet \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

$$\bullet \quad |x| = |-x|$$

$$\bullet \quad |xy| = |x||y|$$

$$\bullet \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\bullet \quad |x^2| = |x|^2 = x^2$$

4. Puissances, racines

Règle de calcul

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ et pour tous entiers $n, p \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\bullet \quad (xy)^n = x^n \times y^n$$

$$\bullet \quad \left(\frac{x}{y} \right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\bullet \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\bullet \quad x^n \times x^p = x^{n+p}$$

$$\bullet \quad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$$

$$\bullet \quad (x^n)^p = x^{np}$$

Remarque.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $1^n = 1$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0^p = 0$
- On peut en fait définir a^b pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, par $a^b = \exp(b \ln(a)) = e^{b \ln a}$. Les règles de calcul ci-dessus sont encore vraies!

Rappel. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a}$ est par définition l'unique nombre **positif** dont le carré est égal à a .

Règle de calcul

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$:

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (si $b > 0$)

Et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$

Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la **racine cubique de a** , notée $\sqrt[3]{a}$, comme étant l'unique nombre réel (positif ou négatif!) dont le cube est égal à a .

Règle de calcul

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$
- $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ (si $b > 0$)
- $(\sqrt[3]{a})^3 = a = \sqrt[3]{a^3}$

Remarque. • Avec la définition étendue de la puissance a^b , on peut écrire $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

- On peut généraliser et définir la racine n -ième de a , pour tout $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, par : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.
Il s'agit de l'unique réel positif x tel que $x^n = a$.

5. Exponentielle et logarithme népérien

Règle de calcul

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,72$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{xy} = (e^x)^y$

On retrouve les mêmes règles de calcul qu'avec les puissances!

Règle de calcul

Pour tous $x, y > 0$ (attention, $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement!), et tout $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$

Règle de calcul

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$

II Ordre sur $\mathbb{R}$

1. Généralités sur la relation " $\leq$ "

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation $\leq$, qui permet de comparer les nombres réels entre eux.

Propriété (*Manipuler des inégalités*)

Pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$:

- $x \leq y \iff x + a \leq y + a$
- $(x \leq y) \text{ et } (x' \leq y') \implies x + x' \leq y + y'$
- Si $a > 0$, $x \leq y \iff ax \leq ay$
- Si $a < 0$, $x \leq y \iff ax \geq ay$

Il faut faire très attention quand on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inégalité !
Ces propriétés sont encore valables pour $\geq$, $<$ et $>$.

Remarque. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

- $a \leq b \text{ et } b \leq a \iff a = b$
- $(a \leq b \text{ et } b \leq c) \implies a \leq c$

Ces propriétés sont vérifiées par d'autres relations (par exemple l'inclusion entre ensembles) et en font une "relation d'ordre". De plus, deux nombres réels sont toujours comparables (on a toujours $a \leq b$ ou $b \leq a$) : on dit que cette relation d'ordre est "totale".

2. Intervalles et partie entière

Notation

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On définit :

$$\begin{aligned} [a; +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} &]a; +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} &]-\infty; a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\]-\infty; a[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} & [a; b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & [a; b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\]a; b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} &]a; b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} &]-\infty; +\infty[&= \mathbb{R} \end{aligned}$$

On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous l'une des formes ci-dessus.

Intuitivement, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ qui "n'ont pas de trou".

Formellement, cela se traduit par : I est un intervalle de $\mathbb{R} \iff \forall a, b \in I, [a, b] \subset I$.

Remarque. • $[a; b] = \emptyset \iff a < b$, et $[a; a] = \{a\}$ (singleton).

- $[a; b[= \emptyset \iff a \leq b$, et il en va de même pour $]a; b]$ et $]a; b[$.
- Un intervalle contient soit 0 élément, soit 1 élément ($[a; a]$), soit une infinité d'éléments.

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **partie entière** de x , notée $\lfloor x \rfloor$, comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Il s'agit donc de l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$, c'est-à-dire tel que $x \in [k; k + 1[$.

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **partie fractionnaire** de x comme étant le nombre $x - \lfloor x \rfloor$.

On la note parfois $\{x\}$ mais cette notation peut porter à confusion !

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\{x\} \in [0, 1[$
- $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.

Exemple

- On a $13,235 \in [13; 14[$ donc $\lfloor 13,235 \rfloor = 13$ et $\{13,235\} = 13,235 - 13 = 0,235$.
- On a $-11,6 \in [-12; -11[$ donc $\lfloor -11,6 \rfloor = -12$ et $\{-11,6\} = -11,6 - (-12) = 12 - 11,6 = 0,4$.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $n \in [n; n+1[$ donc $\lfloor n \rfloor = n$ et $\{n\} = 0$.
- $\lfloor \pi + 6 \rfloor = 9 = \lfloor \pi \rfloor + 6$.
- $\lfloor e + \sqrt{2} \rfloor = 4$ mais $\lfloor e \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 2 + 1 = 3$.

3. Inégalités et valeur absolue

Proposition

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\epsilon > 0$, on a :

- $|x| \geq 0$
- $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$
- **Inégalité triangulaire** : $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x| \leq \epsilon \iff x \in [-\epsilon; \epsilon] \iff -\epsilon \leq x \leq \epsilon$
- $|x - a| \leq \epsilon \iff x \in [a - \epsilon; a + \epsilon] \iff a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$

4. Majorants et compagnie

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que :

- a est un **majorant** de E lorsque : $\forall x \in E, x \leq a$.
- a est un **minorant** de E lorsque : $\forall x \in E, a \leq x$.
- a est le **maximum** (ou plus grand élément) de E , noté $\max(E)$, si $a \in E$ et a majore E .
- a est le **minimum** (ou plus petit élément) de E , noté $\min(E)$, si $a \in E$ et a minore E .
- a est la **borne supérieure** de E , notée $\sup(E)$ si a est le plus petit majorant de E .
- a est la **borne inférieure** de E , notée $\inf(E)$ si a est le plus grand minorant de E .

Formellement : $\sup(E) = \min(\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } E\})$ et $\inf(E) = \max(\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } E\})$

Propriété

- S'il existe, le maximum (ou minimum) est unique. Il en va donc de même pour la borne supérieure ou inférieure.
- Si le maximum de E existe, alors il s'agit également de sa borne supérieure : $\max(E) = \sup(E)$.
- Il en va de même pour le minimum et la borne inférieure.

Démonstration. • Supposons que a et b sont deux maximums de l'ensemble E .

Alors on a $a, b \in E$, et a et b majorent tous les deux E .

Comme a majore E et $b \in E$, on a $b \leq a$.

Mais comme b majore E et $a \in E$, on a aussi $a \leq b$. Ainsi : $a = b$. D'où l'unicité.

La preuve est la même pour le minimum. Comme le sup et l'inf, s'ils existent, sont respectivement un minimum et un maximum, ils sont aussi nécessairement uniques.

- Soit $a = \max(E)$. Montrons qu'on a alors aussi $a = \sup(E)$. On sait que a majore E , il reste à prouver que c'est le plus petit majorant.
Soit b un majorant de E . On veut montrer que $a \leq b$.
Or b majore E et $a \in E$. On a donc bien $a \leq b$, et ainsi $a = \sup(E)$.
- La preuve est la même pour le minimum et la borne inférieure.

□

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ n'a aucun minorant (il contient des entiers arbitrairement grands dans les négatifs). Par contre, x majore E .

E admet un maximum, qui est par définition $\lfloor x \rfloor : \lfloor x \rfloor = \max(E) = \sup(E)$.

Exemple

On prend $E = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots \right\}$. Alors 15 est un majorant de E . et -2 un minorant de E .

E admet un maximum, qui est 1. En effet, $1 = \frac{1}{1} \in E$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \leq 1$. On a donc aussi $\sup(E) = 1$

Par contre, E n'admet pas de minimum. En effet, si par l'absurde $a \in E$ était le minimum de E , alors on pourrait écrire $a = \frac{1}{n}$ avec un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Mais alors $\frac{1}{n+1} < a$ et $\frac{1}{n+1} \in E$, ce qui contredit le fait que a minore E .

Enfin, montrons que $0 = \inf(E)$. 0 est clairement un minorant de E . On doit donc montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, on a l'implication m minore $E \implies m \leq 0$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On va raisonner par contraposée, et montrer que $m > 0 \implies \exists x \in E, m > x$.

Soit $m > 0$. On cherche un $x \in E$ tel que $m > x$, c'est-à-dire un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > \frac{1}{n}$, ou encore $\frac{1}{m} < n$ (puisque $m > 0$).

On prend $n = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor + 1$, qui convient bien. Ainsi, m ne peut pas minorer E .

On a bien montré que $0 = \inf(E)$.

Exemple

$E = \mathbb{Z}$ n'admet ni minorant ni majorant. A fortiori, elle n'admet pas non plus de minimum ou maximum, ni de borne inférieure ou supérieure.

- Remarque.*
- Une partie n'admet pas toujours de majorant ou de minorant. A fortiori, une partie n'admet pas toujours de maximum ou minimum, ni de borne supérieure ou inférieure.
 - Lorsqu'ils existent, les majorants et minorants ne sont pas uniques (il y en a même une infinité).
 - On peut avoir une borne supérieure sans avoir de maximum (et idem pour la borne inférieure bien sûr)

Propriété (Caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$a = \sup(E) \iff (\forall x \in E, x \leq a) \text{ et } (\forall \epsilon > 0, \exists x \in E, a - \epsilon < x)$$

Exemple

Soit $E = [-7; -2[$. E admet des majorants et des minorants : il est borné.

De plus, E admet un minimum, qui est -7 . On a donc aussi $\inf(E) = -7$.

Enfin, -2 est un majorant de E , et pour tout nombre ϵ , on peut trouver un nombre $y \in E$ tel que $-2 - \epsilon < y < -2$. Donc on a bien $-2 = \sup(E)$.

Si E possédait un maximum, il s'agirait aussi du sup, donc de -2 : c'est absurde puisque $-2 \notin E$.

La notion de "borne" de l'intervalle correspond bien à la notion de "borne inférieure" et "borne supérieure" d'une partie!

Théorème (*Existence de la borne supérieure*)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Application

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **croissante et majorée** à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors u_n **converge** vers une limite $l \in \mathbb{R}$ (quand n tend vers $+\infty$).

Démonstration. On considère l'ensemble des valeurs de la suite : $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure.

Posons $l = \sup(E) \in \mathbb{R}$, et montrons que la suite $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $l = \sup(E)$, on sait qu'il existe un nombre $x \in E$ tel que $l - \epsilon \leq x$.

Soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \epsilon \leq u_N$.

Comme la suite (u_n) est croissante, on sait que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leq u_N$.

Comme l est un majorant de E , on a que $u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, on a montré que pour tout $n \geq N$, on a $l - \epsilon \leq u_N \leq u_n \leq l$.

Les termes de la suite s'approchent donc de l à moins de ϵ à partir d'un certain rang. Comme ϵ est quelconque, on a montré que les termes de la suite deviennent arbitrairement proches de l : la suite (u_n) converge vers l .

Nous formaliserons la notion de limite un peu plus tard, en partant de cette intuition ! □

III Résolution d'équations et inéquations

Définition

Soit E un ensemble.

Une (in)équation d'inconnue x dans E est une assertion mathématique sous la forme d'une (in)égalité, qui dépend de $x \in E$.

On appelle **solution** de l'(in)équation les valeurs de l'inconnue x pour lesquelles l'(in)égalité est vraie.

Résoudre cette (in)équation consiste à écrire sous la forme la plus simple possible l'**ensemble des solutions** de l'(in)équation.

Remarque. • Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions prendra souvent la forme d'un ensemble fini sous forme de liste, ou d'un intervalle ou une union d'intervalles.

- On se contente dans ce chapitre de résoudre des (in)équations d'inconnue réelle ($x \in \mathbb{R}$), mais on s'intéressera plus tard à des équations dans d'autres ensembles : on pourra avoir une inconnue complexe, plusieurs inconnues (systèmes linéaires), ou même une fonction (équation différentielle).

Méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation, on commence souvent par **regrouper les termes du même côté**, pour se retrouver à comparer une certaine expression à 0.

Lorsque c'est possible, il est ensuite très souvent avantageux de **factoriser au maximum**.

En effet, on se ramène alors à une équation produit nul (ou quotient nul), ou à une étude de signe.

1. Avec des polynômes

Définition

On appelle fonction polynomiale réelle toute fonction de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ où n est un entier naturel et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$.

- n est appelé le **degré** ;
- a_n est appelé le **coefficient dominant** ;
- a_0 est appelé le coefficient constant.

Exemple

- Les fonctions polynomiales de degré 0 sont les constantes non nulles.
- Les fonctions polynomiales de degré 1 sont les fonctions affines non constantes.
- Les fonctions polynomiales de degré 2 ont été étudiées en classe de première.
- $f(x) = 3x^8 + 5x^4 - x^3 + 2x - \sqrt{2}$ définit une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, de degré 8 et de coefficient dominant 3. Son coefficient constant est $-\sqrt{2}$.

Remarque. On a étudié les fonctions polynomiales de degré 0 et 1 en troisième, et de degré 2 en première. On sait donc déjà résoudre des équations et inéquations faisant intervenir ces objets.

Proposition (*Rappel : Fonctions polynomiales de degré 2*)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré 2, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

On définit le **discriminant** de P par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	Racines	Tableau de signe	Factorisation											
$\Delta < 0$	Pas de racine réelle	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	signe de a		Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$					
x	$-\infty$	$+\infty$												
$f(x)$	signe de a													
$\Delta = 0$	Une seule racine "double" $x_0 = \frac{-b}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>s(a)</td><td>0</td><td>s(a)</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	s(a)	0	s(a)	$f(x) = a(x - x_0)^2$			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$											
$f(x)$	s(a)	0	s(a)											
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>s(a)</td><td>0</td><td>s(-a)</td><td>0</td><td>s(a)</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	s(a)	0	s(-a)	0	s(a)	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$										
$f(x)$	s(a)	0	s(-a)	0	s(a)									

Définition

On appelle **racine** de la fonction polynomiale f tout nombre x tel que $f(x) = 0$.

Proposition (*Factorisation par une racine*)

Soit f une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors :

r est une racine de $f \iff$ il existe une fonction polynomiale g , de degré $n - 1$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - r)g(x)$.

Méthode (*Polynôme de degré 3 et "racine évidente"*)

Lorsqu'une (in)équation fait intervenir un polynôme P de degré 3, on doit trouver une racine sans l'aide des formules.

Il s'agit alors le plus souvent de trouver une **"racine évidente"**, qui est presque toujours 0, 1 ou -1 (et plus rarement de 2 ou -2). Il faut donc tester pour voir si l'un de ces nombres convient !

Une fois trouvée une racine r , on sait qu'on peut écrire $P(x) = (x - r)(ax^2 + bx + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$: il reste à trouver les nombres a, b, c convenables pour factoriser le polynôme, en identifiant les coefficients.

Exemple

On veut résoudre l'équation suivante : $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 0$.

On pose $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$, fonction polynomiale de degré 3.

$f(0) = -3 \neq 0$ (coefficient constant) et $f(1) = -12 \neq 0$, mais on a $f(-1) = 2 \times (-1) - 3 \times 1 - 8 \times (-1) - 3 = -2 - 3 + 8 - 3 = 0$.

-1 est racine évidente, donc on peut factoriser f par $(x - (-1)) = (x + 1)$:

on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

On a $(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$

Ainsi, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$. Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a &= 2 \\ a + b &= -3 \\ b + c &= -8 \\ c &= -3 \end{cases} \quad \text{qui devient} \quad \begin{cases} a &= 2 \\ b &= -3 - a = -3 - 2 = -5 \\ b &= -8 - c = -8 + 3 = -5 \\ c &= -3 \end{cases}$$

$(a, b, c) = (2, -5, -3)$, donc on a factorisé f en : $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x - 3)$.

Reste à trouver les racines. Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$, donc le trinôme admet deux racines, données par $\frac{5 \pm 7}{4}$, c'est-à-dire 3 et $-\frac{1}{2}$.

Ainsi, les solutions de l'équation sont $\mathcal{S} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 3 \right\}$

2. Avec des fractions rationnelles

On veut résoudre une (in)équation "rationnelle", c'est-à-dire faisant intervenir des fractions de polynômes en l'inconnue. Par exemple : (E) : $\frac{-2}{x+3} \leq x$.

Méthode

On regroupe tous les termes du même côté, et on factorise au maximum en **mettant au même dénominateur**.

Exemple

$$\begin{aligned} \frac{-2}{x+3} \leq x &\iff x + \frac{2}{x+3} \geq 0 && \text{regrouper les termes} \\ &\iff \frac{x(x+3)}{x+3} + \frac{2}{x+3} \geq 0 && \text{mettre au même dénominateur} \\ &\iff \frac{x^2 + 3x + 2}{x+3} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} \geq 0 && \text{factoriser au maximum} \end{aligned}$$

Pour cette dernière étape, on a factorisé le numérateur en calculant ses racines : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc on a 2 racines de la forme $\frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$: $x_1 = \frac{-2}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-4}{2} = -2$.

Reste à dresser le tableau de signes de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(x+1)(x+2)}{x+3}$:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$x+1$		-	-	0	+
$x+2$		-	0	+	+
$x+3$		-	0	+	+
$f(x)$		-	+	0	+

On obtient comme ensemble de solutions : $\mathcal{S} =]-3; -2] \cup [-1; +\infty[$.

3. Avec des valeurs absolues

Méthode

Quand une (in)équation fait intervenir une valeur absolue, on peut la retirer si on connaît son signe. En général : il faut faire une disjonction de cas !

Exemple

$$\begin{aligned} |x-1| > 1-2x &\iff [(x-1) \geq 0 \text{ et } x-1 > 1-2x] \text{ ou } [x-1 < 0 \text{ et } -(x-1) > 1-2x] \\ &\iff [(x-1) \geq 0 \text{ et } 3x > 2] \text{ ou } [x-1 < 0 \text{ et } 1-x > 1-2x] \\ &\iff \left[x \geq 1 \text{ et } x > \frac{2}{3} \right] \text{ ou } [x < 1 \text{ et } x > 0] \\ &\iff [x \geq 1] \text{ ou } [0 < x < 1] \\ &\iff x > 0 \iff x \in]0; +\infty[\end{aligned}$$

D'où l'ensemble de solutions : $\mathcal{S} =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

4. Avec des racines carrées

Pour se débarrasser des racines carrées, on aurait envie d'élever au carré les deux membres, mais attention !

Proposition

Pour tous nombres x et y **positifs**, on a : $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

Attention, pour $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques, on a : $x^2 = y^2 \iff x = \pm y$!

Méthode

Pour résoudre une (in)équation faisant intervenir une racine carrée :

- On détermine le domaine d'existence des racines carrées impliquées.
- Si nécessaire, on procède par disjonction de cas en fonction du signe de l'autre membre.
- **Dans le cas où les deux membres sont positifs**, on peut les élever au carré.
- On réunit toutes les solutions, en n'oubliant pas de se restreindre au domaine d'existence obtenu !

Exemple

On veut résoudre l'inéquation $(E) : \sqrt{x+2} < x$.

Le domaine d'existence de la racine carrée est $[-2; +\infty[$ (pour avoir $x+2 \geq 0$).

- Pour $x < 0$, l'équation n'a pas de solution puisqu'une racine carrée est toujours positive.
- Pour $x \geq 0$, on peut élever au carré. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $(E) \iff x+2 < x^2 \iff x^2 - x - 2 > 0$

Le discriminant du trinôme obtenu est $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc on a deux racines qui sont $\frac{1 \pm 3}{2}$, à

savoir 2 et -1 . Le coefficient dominant est $1 > 0$, donc on a :

$$x^2 - x - 2 > 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[.$$

Comme on est dans le cas $x \geq 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est $\mathcal{S} =]2; +\infty[$, qui est bien inclus dans le domaine d'existence de la racine carrée.

5. En utilisant la monotonie

Si on a une (in)équation qui consiste à comparer deux membres de la forme $f(A(x))$ et $f(B(x))$, et qu'on sait que f est monotone, alors il suffit de comparer $A(x)$ et $B(x)$ pour conclure.

Exemple

On veut résoudre l'équation $(E_1) : e^{2x^2-3x+1} = e^{2x+1}$.

Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette équation est équivalente à : $2x^2 - 3x + 1 = 2x + 1$, qui est polynômiale de degré 2.

$$\text{D'où } (E_1) \iff 2x^2 - 5x = 0 \iff x(2x - 5) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0) \iff (x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2})$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{S} = \left\{0; \frac{5}{2}\right\}.$$

Exemple

On veut résoudre l'équation $(E_2) : \ln(x+1) < \ln(3+x) - \ln(2)$

On a $(E_2) \iff \ln(x+1) < \ln\left(\frac{3+x}{2}\right) \iff x+1 < \frac{3+x}{2}$ puisque $\ln$ est strictement croissante.

$$\text{D'où } (E_2) \iff 2(x+1) < 3+x \iff 2x+2 < 3+x \iff x < 1, \text{ et donc } \mathcal{S} =]-\infty; 1[.$$

6. Par changement de variable

Exemple

On veut résoudre l'équation suivante : $(\ln(x))^3 + (\ln(x))^2 - \ln(x) - 1 = 0$.

On remarque que l'inconnue apparaît toujours dans un "bloc" de la forme $\ln(x)$!

On a presque une équation où l'inconnue serait $\ln(x)$.

Formellement : on effectue le **changement de variable** $y = \ln(x)$.

- L'équation n'a un sens que si $x > 0$ (pour que $\ln(x)$ existe).
- Dans ce cas, on peut définir y par $y = \ln(x)$, et l'équation devient : $(E) \iff y^3 + y^2 - y - 1$.
- On résout cette nouvelle équation. Elle est polynomiale de degré 3, donc on cherche une racine évidente. On trouve par exemple 1.
On écrit alors $y^3 + y^2 - y - 1 = (y - 1)(ay^2 + by + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On a $(y - 1)(ay^2 + by + c) = ay^3 + (b - a)y^2 + (c - b)y - c = y^3 + y^2 - y - 1$, donc en identifiant les coefficients : $a = 1$, $b - a = 1$, $c - b = -1$ et $c = 1$. On obtient $(a, b, c) = (1, 2, 1)$.
On a donc factorisé $y^3 + y^2 - y - 1 = (y - 1)(y^2 + 2y + 1) = (y - 1)(y + 1)^2$ par identité remarquable.
- Ainsi, on a $(E) \iff y \in \{1, -1\} \iff \ln(x) = \pm 1 \iff x = e^{\pm 1}$ puisque $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^{\ln(x)} = x$. Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{e ; \frac{1}{e}\right\}$.

Méthode

- Reconnaître un changement de variable lorsque l'inconnue est toujours dans un même "bloc".
- Prendre garde au domaine d'existence de l'inconnue avant et après le changement de variable.
- Ne pas oublier de conclure en donnant les solutions pour l'inconnue d'origine.

7. Par une étude de fonction

Résoudre une inéquation revient souvent à étudier le signe d'une fonction.

C'est parfois le tableau de variation qui nous donne des informations sur le signe !

Méthode

Pour résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de fonction, il faut :

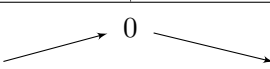
- Regrouper tous les termes du même côté afin de se ramener à une étude de signe
- Dériver la fonction obtenue (en vérifiant qu'elle est dérivable !)
- Étudier le signe de la dérivée.
- En déduire les variations de la fonction.
- Conclure sur le signe de la fonction, souvent à l'aide d'un maximum ou minimum.

Exemple

On veut résoudre l'inéquation $(E) : \ln(x) \leq x - 1$, à l'aide d'une étude de fonction.

- On a $(E) \iff \ln(x) - x + 1 \leq 0$.
- On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$, qui est définie sur $]0; +\infty[$ (attention!)
 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonction qui le sont, et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1-x}{x}.$$
- Sur le domaine $]0; +\infty[$, on a $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x$. On obtient :

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Où on a calculé $f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$.

- f a 0 pour maximum, donc elle est toujours négative. Ainsi, l'ensemble des solutions de $f(x) \leq 0$ est $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+^*$.

8. (In)équations à paramètre

Une **(in)équation à paramètre** est un ensemble d'(in)équations contrôlé par une variable, le "paramètre". Résoudre une (in)équation à paramètre consiste à déterminer, **pour chaque valeur possible du paramètre**, l'ensemble des solutions associé. On doit souvent procéder par **disjonction de cas**.

Attention à ne pas confondre l'inconnue et le paramètre !

Exemple

On souhaite résoudre l'équation à paramètre $(E_\lambda) : \lambda x^2 + 2x + 1 = 0$, d'inconnue x réelle et de paramètre λ réel.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le discriminant du trinôme est $\Delta_\lambda = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda)$. 3 cas existent :

- Si $1 - \lambda < 0$, d'est-à-dire si $\lambda > 1$, alors $\Delta_\lambda < 0$ donc l'équation (E_λ) n'a pas de solution.
- Si $1 - \lambda = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 1$, alors $\Delta_\lambda = 0$ donc l'équation (E_λ) a une unique solution, donnée par $x = -\frac{2}{2\lambda} = -1$.
- Si $1 - \lambda > 0$, c'est-à-dire si $\lambda < 1$, alors $\Delta_\lambda > 0$ donc l'équation (E_λ) a deux solutions, données par
$$\frac{-2 \pm \sqrt{4(1-\lambda)}}{2\lambda} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\lambda}}{\lambda}.$$

Exemple

On souhaite résoudre $(E_\lambda) : x - 1 < 2\lambda x + 1$, d'inconnue x réelle et de paramètre λ réel.

On a : $(E_\lambda) \iff x - \lambda x < 1 + 1 \iff x(1 - \lambda) < 2$

Pour isoler x , on voudrait diviser par $1 - \lambda$: il faut faire attention !

- Si $\lambda = 1$, on a $1 - \lambda = 0$, et l'inéquation devient $0 < 2$, qui est toujours vraie : l'ensemble de solutions associé est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
- Si $\lambda < 1$, on a $1 - \lambda > 0$, donc on divise par un nombre positif :
 $(E_\lambda) \iff x < \frac{2}{1 - \lambda}$. On a donc $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{2}{1 - \lambda} \right[$.
- Si $\lambda > 1$, on a $1 - \lambda < 0$, donc on divise par un nombre négatif :
 $(E_\lambda) \iff x > \frac{2}{1 - \lambda}$. On a donc $\mathcal{S} = \left] \frac{2}{1 - \lambda}; +\infty \right[$.