Chapitre 10 – Dénombrements

L'objectif du chapitre est de réussir à répondre efficacement à la question : « **Combien ?** ».
Il s'agit donc de réussir à compter le nombre d'objets dans un ensemble fini donné.
C'est particulièrement utile en probabilités, quand la probabilité est égale au nombre de cas favorables divisé par le nombre total de cas. Mais de manière plus générale, il est souvent intéressant de savoir déterminer le nombre d'objets mis en jeu dans un problème !

Dans tout ce chapitre, n est un entier naturel.

I Cardinal d'un ensemble fini

Définition

Soit E un ensemble fini comportant n éléments. On dit alors que E est de **cardinal** $n \in \mathbb{N}$, et on note $\text{Card}(E) = n$, ou parfois $\#E = n$.

- L'*ensemble vide* est un ensemble fini et son cardinal est $\text{Card}(\varnothing) = 0$.
- Un *singleton* est un ensemble de cardinal 1.

Exemple

- Madame H n'a réussi à corriger que le tiers de la moitié de son paquet de 42 copies. Quel est le cardinal de l'ensemble des copies restantes ?
- Donner le cardinal des ensembles suivants :

a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ b) $[\![1, n]\!], \quad n \in \mathbb{N}$ c) $[\![n, p]\!], \quad n, p \in \mathbb{N}$
d) $\{i^2 \mid i \in [\![-4, 4]\!]\}$ e) $\{n \in [\![0, 100]\!] \mid n \text{ est divisible par } 3\}$

⚠ Attention à ne pas confondre le nombre d'éléments et la "taille" des éléments.
Par exemple, l'ensemble $\{(3, 1, 2)\}$ est bien un *singleton*, qui contient un seul élément, le triplet $(3, 1, 2)$.

Définition (*Hors programme*)

Formellement, on dit qu'un ensemble E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : [\![1, n]\!] \to E$ telle que f est **bijective**.
n est alors appelé le **cardinal** de l'ensemble E.

La définition ci-dessus n'est pas à connaître, mais elle permet de définir rigoureusement la notion de cardinal.
Par contre, le lien entre le cardinal et les applications injectives, surjectives, bijectives est à connaître :

Proposition

Soient E, F deux ensembles finis. Alors :

- Il existe une injection de E vers F si et seulement si $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
- Il existe une surjection de E vers F si et seulement si $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
- Il existe une bijection de E vers F si et seulement si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

II Parties d'un ensemble

Proposition

Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$ une partie de E.
Alors A est encore un ensemble fini, de cardinal $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.
De plus, on a $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E) \iff A = E$.

Définition

Soient A, B deux ensembles. On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$.
Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles. On dit qu'ils sont **2 à 2 disjoints** lorsque :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

Remarque. ⚠ Ne pas confondre les deux propriétés suivantes :

- P : $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints
- P' : $A_1 \cap \dots \cap A_n = \varnothing$.

On a toujours $P \Longrightarrow P'$, mais la réciproque est fausse en général ! Par exemple : $\{1,2\}, \{1,3\}$ et $\{2,3\}$ ne sont pas 2 à 2 disjoints, mais leur intersection est vide.

Proposition

Si A et B sont deux ensembles non finis *disjoints*, alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Si $A_1, \dots, A_n$ sont deux ensembles finis *2 à 2 disjoints*, alors $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$

Exemple

Déterminer le nombre de cartes d'un jeu de (52) cartes qui sont soit un 7, soit une figure.

Proposition

Soit E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors le complémentaire de A dans E a pour cardinal :

$$\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}(E \backslash A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

Démonstration. A et $\overline{A}$ sont deux ensembles disjoints, et leur union est E. On a donc $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}\left(\overline{A}\right)$.
D'où $\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}(E \backslash A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$. □

Proposition

Soient A, B deux ensembles finis. Alors on a :

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$

Démonstration. On sait que $A \cap B$, $A \backslash B$ et $B \backslash A$ sont des ensembles 2 à 2 disjoints.
De plus : $(A \cap B) \cup (A \backslash B) = A$, et de même $(A \cap B) \cup (B \backslash A) = B$ et $(A \cap B) \cup (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$.
Ainsi :

- $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\,(A \backslash B) + \mathrm{Card}\,(B \backslash A)$
- $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) = \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\,(A \backslash B) + \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\,(B \backslash A) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) = \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\,(A \backslash B) + \mathrm{Card}\,(B \backslash A)$

D'où l'égalité. □

Exemple

- Déterminer le nombre de cartes d'un jeu de (52) cartes qui sont soit un 7, soit un trèfle.
- En déduire le nombre de cartes qui ne sont ni un 7, ni un trèfle.
- Dans un lycée de 1200 élèves, 776 pratiquent une activité sportive, 354 jouent d'un instrument de musique, et 213 ne font ni l'un ni l'autre. Combien d'élèves sont sportifs et musiciens ?

III Produits cartésiens, ensemble d'applications et ensemble des parties

Rappel.

- Soient E et F deux ensembles. On définit le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$, comme étant l'ensemble des **couples** (x, y) constitués d'un élément de E suivi d'un élément de F :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$$

- Soient $n \geq 2$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. On définit leur produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ comme étant l'ensemble constitué des familles ordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ telles que $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$:

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\}$$

  On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est un n**-uplet**.
- Pour E un ensemble, on note E^n au lieu de $E \times E \times \ldots \times E$.

Proposition

- Soient E et F des ensembles finis. Alors : $\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Alors $\text{Card}\,(E_1 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \text{Card}(E_i)$.
- En particulier, si E est un ensemble fini, alors $\text{Card}(E^n) = (\text{Card}(E))^n$.

Démonstration. Le premier point est admis (mais évident).
Le second point découle du premier par récurrence sur n, et le troisième est une application du second à $E_1 = \ldots = E_n = E$. □

Proposition

Soient E, F deux ensembles finis. On rappelle qu'on note $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ l'ensemble des fonctions de E dans F.
Alors cet ensemble est fini, et son cardinal vaut $\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$

Démonstration. Si on note $n = \text{Card}(E)$, et qu'on énumère les éléments de E par $x_1, \ldots, x_n$, alors une fonction de E dans F n'est rien d'autre que le choix d'un élément $f(x_1) \in \mathcal{F}$ pour toute valeur de $i \in [\![1, n]\!]$.
On peut donc assimiler les fonctions de E dans F aux n-uplets $(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in F^n$.
Ainsi : $\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}\,(F^n) = \text{Card}(F)^n = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$ □

Définition

Soit E un ensemble. Alors on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles qui sont inclus dans E : $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$

Proposition

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$ est encore fini, et son cardinal vaut

$$\text{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Démonstration. Notons $n = \text{Card}(E)$, et énumérons les éléments de E par $x_1, \ldots, x_n$.
Alors on peut associer chaque partie A de E à un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$, où $a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in A \\ 0 & \text{si } x_i \notin A \end{cases}$.
Chaque partie de E s'obtient de la sorte de manière unique, donc on a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^n$. Ainsi :
$\text{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = \text{Card}\left(\{0,1\}^n\right) = \text{Card}(\{0,1\})^n = 2^n = 2^{\text{Card}(E)}$. □

Exemple

1. On pose $A = \{1,5,6,9\}$ et $B = \{1,3,4\}$.
   - Déterminer le cardinal de $A \times B$ et lister ses éléments.
   - Même question pour A^2 et B^3
   - Même question pour $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$.
   - Y a-t-il autant de fonctions de A dans B que de fonctions de B dans A ?
2. On tire successivement trois cartes (avec remise) dans un jeu de carte. Quelle est le nombre de possibilités de tirer d'abord un valet, puis un trèfle, et enfin un as ?
3. On distibue aux spectateurs d'une conférence une liste de 10 pays (autre de la France), et on leur demande de cocher tous ceux qu'ils ont déjà visités. Combien faut-il de spectateurs pour être sûr que deux spectateurs auront exactement la même liste ?

IV Choix de p objets parmi n

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au choix de p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E.
On peut décider de choisir des éléments **avec ou sans répétition**, ce qui revient à "remettre" ou non l'élément choisi dans l'ensemble avant de choisir le suivant. On peut également donner ou non une importance à l'**ordre** des éléments choisis, ce qui revient à choisir les éléments simultanément ou bien dans un ordre précis. Ainsi, on se trouve face à 4 cas de figure :

1. Choix avec ordre et avec répétition : par exemple le nombre de codes de cartes bancaires.
2. Choix avec ordre et sans répétition : par exemple le nombre de possibilités au tiercé.
3. Choix sans ordre et sans répétition : par exemple le nombre de choix d'un groupe de 4 délégués dans une classe.
4. Choix sans ordre et avec répétition : c'est beaucoup plus rare !

Soit donc $n, p \in \mathbb{N}$.

1. Choix avec ordre et répétition

Proposition

Choisir p éléments parmi un ensemble fini E à n éléments, dans l'ordre et avec répétition possible, revient à choisir un p-uplet d'éléments de E.
Le nombre de possibilités est donc $\text{Card}\left(E^p\right) = n^p$.

Remarque. Dans ce cadre, on appelle parfois « p-liste d'éléments de E » un p-uplet de E^p.

Exemple

1. Combien y a-t-il de codes de cartes bancaires différents ?
2. Combien de "mots" de 6 lettres peut-on écrire avec les lettres A, B, E et N ?
3. **Exemple fondamental : tirages successifs avec remise**.
   On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement p boules dans l'urne, en notant le numéro obtenu et en **remettant** la boule dans l'urne à chaque fois. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est alors n^p.
4. Combien de manières y a-t-il de ranger 5 paires de chaussettes toutes différentes dans 10 tiroirs distincts ? Chaque tiroir peut contenir entre 0 et 5 paires.

2. Choix avec ordre et sans répétition

Définition

Soit E un ensemble fini. On appelle « p-liste de E sans répétition » (ou parfois « p-arrangement de E » tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ d'éléments 2 à 2 distincts (ie : $\forall i, j \in [\![1, p]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$).

Remarque. Pour qu'il existe au moins une p-liste de E sans répétition, il faut nécessairement avoir $p \leq \mathrm{Card}(E)$!

Proposition

Choisir p éléments parmi un ensemble fini E à n éléments, dans l'ordre et sans répétition possible, revient à choisir une p-liste sans répétition d'éléments de E.

Le nombre de possibilités est : $n(n-1)\dots(n-p+1)$. Ce nombre vaut $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$, et 0 sinon.

Exemple

1. Combien y a-t-il de possibilités de tiercés dans une course de 20 chevaux ?
2. Combien de mots peut-on écrire en utilisant 3 lettres distinctes parmi A, B, C, D et E ?
3. **Exemple fondamental : tirages successifs sans remise**.
   On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement p boules dans l'urne, en notant le numéro obtenu mais sans remettre la boule tirée dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est alors $n(n-1)\dots(n-p+1)$.
4. Combien de manières y a-t-il de ranger 5 paires de chaussettes différentes dans 10 tiroirs distincts, si on veut que chaque tiroir contienne au plus une paire ?

Définition

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle **permutation** de E toute n-liste de E sans répétition.

Exemple

Donner une permutation de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, puis une 7-liste de E qui n'est pas une permutation.

Proposition

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors le nombre de permutations de E vaut $n!$.

Exemple

- Combien de permutation peut-on former à partir de $E = [\![1, 4]\!]$? Et $[\![3, 8]\!]$?
- Les permutations de $[\![1, n]\!]$ correspondent exactement aux applications bijectives de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Cet ensemble se note traditionnellement S_n, et on a $\mathrm{Card}(S_n) = n!$

3. Choix sans ordre et sans répétition

Définition

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle p-combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Remarque.
- Ne pas confondre les p-combinaisons et les p-listes ! Dans une liste (dans un p-uplet), l'ordre importe. Dans une combinaison (dans un ensemble), l'ordre n'importe pas.
- Pour qu'il existe une p-combinaison de E, on doit nécessairement avoir $p \leq \mathrm{Card}(E)$.

Ne pas confondre les p-combinaisons et les p-listes : dans une liste (dans un p-uplet), l'ordre importe. Dans une combinaison (dans un ensemble), l'ordre n'importe pas.

Exemple

Donner une 3-combinaison de $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Proposition

Choisir p éléments parmi un ensemble fini E à n éléments sans répétition possible et sans ordre revient à choisir une p-combinaison de E.

Le nombre de possibilités est : $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$. Ce nombre vaut $\binom{n}{p}$... par définition !

Démonstration. Toute p-combinaison A de E admet $p!$ permutations, qui sont exactement les p-listes sans répétition de E contenant exactement les éléments de A.

Ainsi, le nombre de p-listes sans répétitions de E est égal à $p!$ fois le nombre de p-combinaisons.

Donc le nombre de p-combinaisons vaut bien $\dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$. □

Exemple

1. Il y a $\binom{44}{4}$ manières de choisir un groupe de 4 délégués dans la classe.
2. **Exemple fondamental : tirage simultané**.
   On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire **simultanément** p boules dans l'urne, et on note tous les numéros tirés sans se soucier de l'ordre. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est alors $\binom{n}{p}$.
3. Combien de manières y a-t-il de ranger 5 paires de chaussettes **parfaitement identiques** dans 10 tiroirs distincts, si on veut que chaque tiroir contienne au plus une paire ?
4. À la belote se joue à 4 joueurs avec un jeu de 32 cartes. Chaque joueur a donc une main initiale de 8 cartes.
   - Combien y a-t-il de mains possibles ? On ne demande pas de valeur numérique.
   - Combien y a-t-il de mains possibles contenant exactement 2 trèfles ?
   - Combien y a-t-il de mains possibles contenant exactement 5 carreaux, 2 piques et 1 cœur ?
   - Combien y a-t-il de mains possibles composées d'au plus 2 couleurs ?

Corollaire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^k$$

Démonstration. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des k-combinaisons de E.

Alors les $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont 2 à deux disjoints, et leur union vaut $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, on a $2^n = \mathrm{Card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. □