Chapitre 11 – Matrices

Dans tous ce chapitre et de nombreux autres, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

I Définitions

Définition

On appelle **matrice de taille** $n \times p$ **à coefficients dans** $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes constitué d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$A \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- $a_{i,j}$ est l'élément situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice. Il est parfois note $(A)_{i,j}$.
- Les éléments $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients de la matrice**.
- On pourra voir noté $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou plus simplement $A = (a_{i,j})$.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple

- On a $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{3} & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} i+1 & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$$

  Ici : $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = -1$, $a_{1,3} = 0$, $a_{2,1} = 2$, $a_{2,2} = \frac{1}{3}$, $a_{2,3} = 5$.
- Écrire la matrice de taille 3×4 dont le terme général est $a_{i,j} = (-1)^i + j$.

Définition

On dit que deux matrices sont **égales** si elles ont la **même taille** et si, en notant $n \times p$ leur taille : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}$.
On note alors $A = B$.

Définition (*Formats particuliers*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Lorsque $n = 1$, on dit que A est une **matrice ligne**.
- Lorsque $p = 1$, on dit que A est une **matrice colonne**.
- Lorsque $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée d'ordre** n.
  On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(= \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}))$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition (*Matrices importantes*)

- La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont nuls est appelée la **matrice nulle**.
  On la note $0_{n,p}$, ou plus simplement 0.
- La matrice carrée d'ordre n, dont le terme général est donné par $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est appelée la **matrice identité** (ou matrice unité) d'ordre n. On la note I_n.
  Tous ses coefficients sont nuls, sauf ceux sur la diagonale qui valent 1.

Exemple

On a $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $0_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Écrire les matrices $0_{1,6}$, I_5 et $0_{2,2}$.

II Opérations sur les matrices

1. Structure vectorielle

Définition (*Addition et multiplication par un scalaire*)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de *même taille*, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

- On définit la matrice $A+B$ comme étant la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients s'obtiennent en additionnant le coefficient de A et le coefficient de B correspondant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], \quad (A + B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

- On définit la matrice λA comme étant la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients s'obtiennent en multipliant par λ le coefficient de A correspondant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Remarque. On définit alors la matrice **opposée** de A comme étant $-A = (-1)A$.
On peut alors définir la différence de deux matrices A et B de même taille par $A - B = A + (-B)$.
Encore une fois, les opérations s'effectuent coefficient par coefficient.

Exemple

Calculer $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad 3 \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $A + B = B + A$ (commutativité)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité, on omettra les parenthèses : $A + B + C$)
- $A + 0_{n,p} = A$ et $A + (-A) = 0_{n,p}$ (0 est "neutre" et $-A$ a les propriétés de l'opposé)
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributivités)
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ (associativité mixte)

Démonstration. On no fera pas la preuve, qui consiste simplement à montrer les égalités coefficient par coefficient, à l'aide des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}$. $\square$

2. Produit matriciel

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit alors la matrice produit, notée $A \times B = AB$, comme étant la matrice de taille $n \times q$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque. Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B pour que le produit matriciel ait un sens !
Le coefficient $(AB)_{i,j}$ correspond alors au produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B, où on somme tous les produits terme à terme.
Le produit de deux matrices carrées d'ordre n est toujours défini.

Exemple

1. Calculer AB et BA lorsque ces produits sont possibles, dans chacun des cas suivants :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (d) On reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et on pose $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Quelle condition faut-il avoir sur les tailles de A et B, pour que les calculs suivants aient un sens ?
   a) $3BA - I_{2,3}$ b) $(AA)B$ c) $AB - BA$

Propriété

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

- $(AB)C = A(BC)$ (associativité du produit : on écrira ABC, sans les parenthèses)
- $AI_p = I_nA = A$
- $A(B + B') = AB + AB'$ et $(A + A')B = AB + A'B$ (distributivité du produit matriciel sur la somme)
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (associativité mixte)

Démonstration. La preuve est tout à fait accessible mais calculatoire. Par exemple pour le troisième point, on a, pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, q]\!]$:
$(A(B + B'))_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}\,(B + B')_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}(b_{k,j} + b'_{k,j}) = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b'_{k,j} = (AB)_{i,j} + (AB')_{i,j}$ □

Remarque. ⚠ Les propriétés habituelles du produit ne s'appliquent pas au produit matriciel !

- On peut avoir un produit nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle ! ($AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0$ ou $B = 0)$).

  Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ou encore $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- On ne peut pas simplifier un produit par un facteur non nul ! (ie ($AB = AC$ et $A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$)).

  Par exemple : $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3\;1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & & \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

- Le produit matriciel n'est **pas commutatif**!! On général : $AB \neq BA$, même si les deux produits sont bien définis. Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**. Par exemple, la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées de même taille. Il en va de même pour la matrice carrée nulle.

3. Puissances et binôme de Newton

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *carrée*, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Par associativité, le produit $A \times A \times \ldots \times A$ avec k facteurs est bien défini, et on le note A^k.
Par convention, on note $A^0 = I_n$.

Exemple

Calculer A^3 où $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque. $\forall k, l \in \mathbb{N}, A^{i+j} = A^k A^l$. ⚠ Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, les propriétés connues sur les puissances dans $\mathbb{K}$ ne sont plus vraies dans le cas des matrices. Par exemple :

- En général, $(AB)^k \neq A^k B^k$
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ en général.
  Par contre, si les matrices commutent, les résultats connus sont tous vrais. En particulier le binôme :

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices **qui commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$. Alors :

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} A^{m-k} B^k$$

Remarque. La matrice I_n commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$!

Exercice 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *On note* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *de sorte que* $A = 2I_3 + B$. *Calculer* B^2 *et* B^3, *et en déduire l'expression explicite de* A^n *en fonction de* n.

4. Transposition

Définition

Soit $A = (a_{ij,}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la **matrice transposée de** A, notée $A^\top$, comme étant la matrice de taille $p \times n$ (⚠) donnée par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], \quad \left(A^\top\right)_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemple

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
2. On a $0_{n,p}^\top = 0_{p,n}$ et $I_n^\top = I_n$
3. La transposition transforme les lignes en colonnes et réciproquement.

Propriété

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\left(A^\top\right)^\top = A$ (On dit que la transposition est *involutive*)
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$
- $(BC)^\top = C^\top B^\top$

Démonstration. Remarquons déjà que les tailles correspondent dans chaque égalité.

- Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$. On a : $\left((A^\top)^\top\right)_{i,j} = (A^\top)_{j,i} = A_{i,j}$.
- Soient $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$. On a :
$\left(C^\top B^\top\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (C^\top)_{i,k}(B^\top)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} C_{k,i}B_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} B_{j,k}C_{k,i} = (BC)_{j,i} = \left((BC)^\top\right)_{i,j}$

$\square$

III Matrices inversibles

1. Définition

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n.
On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
On dit alors que B est **l'inverse** de A, et on note $B = A^{-1}$.
On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est inversible d'inverse $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $I_n \times I_n = I_n$, donc la matrice identité est inversible, d'inverse $I_n^{-1} = I_n$.
3. Pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $0_n B = 0_n \neq I_n$, donc 0_n n'est pas inversible.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, pour toute matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $AB = \begin{pmatrix} a+5c & b+5d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$ puisque $0 \neq 1$.

Propriété (*Simplification*)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est *inversible*, alors on a :

$$AB = AC \iff B = C$$

Démonstration. Le sens réciproque est toujours vrai. Pour le sens direct, lorsque A est inversible, on a $AB = AC \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC$, c'est-à-dire $AB = AC \Longrightarrow B = C$ □

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$. Alors on a nécessairement $BA = I_n$, et donc A et B sont inverses l'une de l'autre.
Pour des matrices carrées, l'une des deux égalités $AB = I_n$ et $BA = I_n$ suffit.

2. Propriétés opératoires

Propriété

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$, et $(A^{-1})^{-1} = A$ (l'opération d'inversion est involutive).
- $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$, et $\left(A^\top\right)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
- $AB \in GL_n(\mathbb{K})$, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in GL_n(\mathbb{K})$, et $\left(A^k\right)^{-1} = (A^{-1})^k$. On note A^{-k}.
- $\lambda A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \lambda \neq 0$, et si c'est le cas, alors $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$

Démonstration.
- $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ par définition de l'inverse, donc A^{-1} est bien inversible d'inverse A.
- $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$ (et de même $A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n$), donc $A^\top$ est bien inversible d'inverse $(A^{-1})^\top$.

- $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$ (et de même $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$), donc AB est bien inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
- On montre ce résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$, car $A^0 = I_n$ et $I_n^{-1} = I_n$. Supposons le résultat vrai au rang $k \in \mathbb{N}$. Alors $A^{k+1} = AA^k$ est un produit de deux matrices inversibles (selon l'HR), donc par le point précédent elle est encore inversible, et son inverse est $(A^k)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^kA^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$ selon l'HR. D'où l'hérédité et donc la récurrence.
- Si $\lambda = 0$, alors $\lambda A = 0$ non inversible.
  Si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda A = \frac{\lambda}{\lambda}A^{-1}A = 1I_n = I_n$ (et de même $\lambda A\frac{1}{\lambda}A^{-1} = I_n$). D'où le résultat. □

Remarque. ⚠ La somme de deux matrices inversibles n'est en général pas inversible !
Par exemple, $I_n + (-I_n) = 0_n$ n'est pas inversible.

Corollaire

Soit $A, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que P est inversible. Alors on a :
A est inversible $\iff$ PA est inversible $\iff$ AP est inversible.

Démonstration. Si A est inversible, alors AP et PA le sont en tant que produit de deux matrices inversibles.
Réciproquement, si AP est inversible, alors $A = (AP)P^{-1}$ est inversible pour la même raison.
De même, si PA est inversible, alors $A = P^{-1}(PA)$ est encore inversible. D'où les équivalences. □

3. Cas des matrices 2×2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition

On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On définit le **déterminant de** A comme étant le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Proposition

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Et si c'est le cas, alors on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration. Si $\det(A) \neq 0$, en posant $B = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a bien $AB = BA = I_2$.

Supposons maintenant que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On a $AA^{-1} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} = I_2$.
Ainsi, $ca' + dc' = 0$ (a', c') est proportionnel à $(d, -c)$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $a' = \lambda d$ et $c' = -\lambda c$
De même, $ab' + bd' = 0$ donc (b', d') est proportionnel à $(-b, a)$: il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $b' = -\mu b$ et $d' = \mu a$.
Mais alors $aa' + bc' = a\lambda d - b\lambda c = \lambda(ad - bc) = 1$, et $cb' + dd' = -c\mu b + d\mu a = \mu(ad - bc) = 1$
D'où $ad - bc \neq 0$, et $\lambda = \mu = \frac{1}{ad-bc}$. D'où le résultat. □

IV Pivot de Gauss sur les matrices

1. Matrices d'opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les mêmes que celles sur les lignes d'un système. À chacune de ces opérations correspond une matrice inversible telle qu'effectuer une opération élémentaire sur la matrice revient à la multiplier par la matrice correspondante.

Définition

1. Soit $i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j$. La matrice correspondant à l'opération de permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ est la matrice $P_{i,j}$ dont les coefficients sont tous 0, sauf ceux d'indice i, j, d'indice j, i, et d'indice k, k avec $k \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j\}$, qui valent 1.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. La matrice correspondant à l'opération de dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la matrice $D_{i;\lambda}$ obtenue à partir de l'identité en remplaçant le coefficient d'indice (i, i) par λ.
3. Soient $i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice correspondant à l'opération de transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est la matrice $T_{i,j;\lambda}$ obtenue à partir de l'identité en remplaçant le coefficient d'indice i, j par λ.

À dessiner

Proposition

- Les matrices d'opérations élémentaires sont toutes obtenues en réalisant l'opération en question à partir de la matrice identité I_n.
- Elles sont toutes inversibles, et on a : $P_{i,j}^{-1} = P_{j,i}$, $D_{i;\lambda}^{-1} = D_{i,\frac{1}{\lambda}}$, $T_{i,j;\lambda}^{-1} = T_{i,j;-\lambda}$.
- Réaliser une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice revient à la multiplier *à gauche* par la matrice de l'opération élémentaire correspondante.
- Réaliser une opération élémentaire *sur les colonnes* d'une matrice revient à la multiplier **à droite** par la matrice correspondante.

Corollaire

Réaliser des opérations élémentaires sur les lignes ne change pas le caractère inversible ou non d'une matrice.

On peut appliquer le Pivot de Gauss à n'importe quelle matrice (carrée ou non), et obtenir une matrice échelonnée, au sens suivant.

Définition

Une matrice est dite échelonnée si le nombre de zéros qui commencent chaque ligne de la matrice est strictement croissant, avec éventuellement plusieurs lignes nulles à la fin.

2. Rang et calcul de l'inverse

Définition

- On appelle rang d'une matrice échelonnée le nombre de lignes non nulles de cette matrice.
- On appelle rang d'une matrice le rang de n'importe quelle matrice échelonnée obtenue en lui appliquant une succession d'opérations élémentaires.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée.
Si A est de rang $r < n$, alors elle comporte au moins une ligne de zéros, et elle n'est donc pas inversible.
Si A est de rang n, on peut poursuivre le pivot de Gausse de la manière suivante :

1. Appliquer des dilatations sur chaque ligne pour obtenir des coefficients diagonaux égaux à 1.
2. Prendre la colonne la plus à droite, et utiliser le pivot (1) pour annuler successivement tous les autres coefficients *au-dessus* de la diagonale.
3. Recommencer cette opération sur les autres colonnes, de droite à gauche.

On appelle "pivot de Gauss étendu" ce procédé, qui permet de transformer notre matrice en la **matrice identité** I_n.

Proposition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est de rang n.
Toute matrice inversible peut être transformée en I_n par opérations élémentaires sur les lignes.
En appliquant ces mêmes opérations, la matrice identité I_n est transformée en A^{-1}.

Démonstration. Soient $O_1, O_2, \dots, O_s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $s \in \mathbb{N}$ les matrices des opérations élémentaires effectuées dans l'ordre sur la matrice A.
On a alors $O_s O_{s-1} \dots O_2 O_1 A = I_n$, donc $A^{-1} = O_s O_{s-1} \dots O_2 O_1 = O_s O_{s-1} \dots O_2 O_1 I_n$.
Ainsi, on obtient bien A^{-1} en multipliant I_n par les mêmes matrices dans le même ordre, c'est-à-dire en effectuant les mêmes opérations élémentaires à partir de la matrice identité I_n. □

Exemple

Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque. En fait, toute matrice A de rang $r \in [\![1, n]\!]$ peut être transformée par des opérations élémentaires sur ses lignes en colonnes en J_r , où J_r a r coefficients égaux à 1 sur la diagonale, et des 0 partout ailleurs.

3. Lien avec les systèmes linéaires

Soit $(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$ un système linéaire de n équations à p inconnues.

Définition (*Représentation matricielle*)

La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ formée des coefficients du système linéaire est appelée **la matrice du système**.

La matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée la **matrice du second membre** du système.

On note $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne formée des inconnues du système.
Alors le système (S) est équivalent à l'équation matricielle : $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Proposition

Le rang d'un système linéaire est égal au rang de sa matrice.
Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si sa matrice est inversible.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que le système $AX = B$ d'inconnue X admette une unique solution.

(iii) Tous les systèmes de la forme $AX = B$, avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue X, admettent une unique solution.

Si c'est le cas, alors l'unique solution est donnée par : $X = A^{-1}B$

En effet, on a alors $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$.

Ainsi, on peut résoudre un système pour déterminer l'inverse d'une matrice.
À l'inverse, on peut aussi réaliser une inversion de matrice afin de résoudre un système. Ceci n'est intéressant que si on a une manière plus simple que le pivot de Gauss pour obtenir l'inverse. C'est le cas dans certains cas particuliers !

Exemple

Soit $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$

1. Donner la représentation matricielle du système linéaire (S) sous la forme $AX = B$.
2. Montrer que $(A - I_3)(A + I_3) = 0_3$.
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (S).

V Matrices carrées particulières

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Diagonales

Définition

On dit que A est une **matrice diagonale** si tous ses coefficients non diagonaux sont nuls : $\forall i, j \in [\![i, n]\!], i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$. Ce sont les matrices de la forme : $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$, avec $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{K}$.

On note $\mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ la matrice ci-dessus.
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple

- $0_n = \mathrm{Diag}(0, \dots, 0)$ et $I_n = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1)$ sont des matrices diagonales.
- Écrire $\mathrm{Diag}(-2, 3, 0, 1)$ et $\mathrm{Diag}(2, -2)$.

Propriété

Soient $D, E \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales. On note $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $E = \mathrm{Diag}(e_1, \dots, e_n)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$.

- $D + \lambda E$ est diagonale, avec $D + \lambda E = \mathrm{Diag}(d_1 + \lambda e_1, \dots, d_n + \lambda e_n)$.
- DE est diagonale, avec $DE = \mathrm{Diag}(d_1 e_1, \dots, d_n e_n)$.
- D^k est diagonale, avec $D^k = \mathrm{Diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$.
- D est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls : $\forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0$.
  Si c'est le cas, alors $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$.

Proposition

Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

- Multiplier une matrice A par D à *gauche* revient à dilater chaque *ligne* par le coefficient diagonal correspondant.
- Multiplier une matrice A par D à *droite* revient à dilater chaque *colonne* par le coefficient diagonal correspondant.

Autrement dit : $(DA)_{i,j} = d_i a_{i,j}$ et $(AD)_{i,j} = d_j a_{i,j}$

Définition

On dit que A est une **matrice scalaire d'ordre** n si A est de la forme $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $\lambda I_n = \mathrm{Diag}(\lambda, \dots, \lambda) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Multiplier par une matrice scalaire λI_n revient à multiplier tous les coefficients par le facteur λ.

Proposition

Les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec *toutes* les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices scalaires.

Démonstration. L'identité commute avec toutes les matrices, donc les matrices scalaires également.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors elle commute avec les matrices diagonales, donc multiplier sa ligne i par 2 revient à multiplier sa colonne i par 2. Ainsi, tous ses coefficients hors de la diagonale sont nécessairement nuls, puisqu'on doit avoir $a_{i,j} = 2a_{i,j}$.
On écrit donc $A = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$. A commute avec les matrices de permutation, donc les opérations $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ doivent donner le même résultat.
Ainsi, on a nécessairement $d_i = d_j$, et ce pour tous les $i, j \in [\![1, n]\!]$. A est donc bien une matrice scalaire. □

2. Triangulaires

Définition

On dit que A est une **matrice triangulaire supérieure d'ordre** n lorsque tous ses coefficients strictement sous la diagonale sont nuls : $\forall 1 \leq j < i \leq n, a_{i,j} = 0$.
De même, on dit que A est une **matrice triangulaire inférieure d'ordre** n lorsque $\forall 1 \leq i < j \leq n, a_{i,j} = 0$.

Ce sont les matrices de la forme : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, respectivement $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Exemple

1. Toutes les matrices diagonales sont à la fois triangulaires supérieures et inférieures. Ce sont d'ailleurs les seules.
2. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et vice versa.
3. Donner une matrice triangulaire non diagonale de taille 2×2.

Propriété

Soient $T, U \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$.

- $T + \lambda U$ est encore triangulaire supérieure.
- TU est encore triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $(TU)_{i,i} = T_{i,i}U_{i,i}$.
- T^k est diagonale, avec comme coefficients diagonaux $\left(T^k\right)_{i,i} = (T_{i,i})^k$.
- T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls : $\forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0$. Si c'est le cas, alors T^{-1} est encore triangulaire supérieure.

Démonstration. Le premier point est immédiat, et tout le reste découle du deuxième point. On a, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:
$(TU)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_{i,k}U_{k,j}$. Or $T_{i,k} = 0$ dès que $k < i$ et $U_{k,j} = 0$ dès que $k > j$.
Ainsi, pour $i > j$, tous les indices k vérifient $k < i$ ou $k > j$, donc tous les termes sont nuls : $(TU)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.
Et pour $i = j$, alors tous les termes sont nuls sauf éventuellement le terme d'indice $k = i$: $(TU)_{i,i} = T_{i,i}U_{i,i}$. □

Cette proposition est évidemment encore valable pour les matrices triangulaires inférieures, en passant à la transposée.

3. Symétriques, antisymétriques

Définition

- On dit que A est **symétrique** lorsque $A^\top = A$, ie : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{j,i} = a_{i,j}$
  On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que A est **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$, ie : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{j,i} = -a_{i,j}$
  On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

1. Donner une matrice symétrique en une matrice symétrique d'ordre 3.
2. Les matrices diagonales sont toujours symétriques.
3. Une matrice triangulaire est symétrique si et seulement si elle est diagonale.
4. Une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux nuls.
   Ainsi, une matrice diagonale est antisymétrique si et seulement si elle est nulle.

Proposition

- Toute combinaison linéaire de deux matrices symétriques est encore symétrique.
- Si une matrice symétrique est inversible, alors son inverse est encore une matrice symétrique.
- Il en va de même pour les matrices antisymétriques.

Remarque. ⚠ Le produit de deux matrices (anti)symétriques n'est en général plus une matrice (anti)symétrique !