

Chapitre 13 – Suites et limites

I Définitions, premières propriétés

1. Convergence vers un réel (limite finie)

Intuitivement, on dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si ses valeurs u_n se rapprochent arbitrairement de l lorsque l'indice n tend vers l'infini.

Représentation :

Graphiquement, il faut que n'importe quelle bande horizontale (aussi fine soit-elle) centrée autour de l contienne *tous* les termes de la suite à partir d'un certain rang (apcr).

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et $l \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

On dit que la suite (u_n) converge s'il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Lorsque la suite ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Montrons que (u_n) converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un rang $N \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel tous les u_n vérifient $|u_n| \leq \varepsilon$.

En prenant $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (par exemple $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$), on a bien : $\forall n \geq N, |u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.

Propriété (Unicité de la limite)

Soit (u_n) une suite réelle qui admet une limite. Alors cette limite est unique.

Propriété (Convergente $\implies$ bornée)

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. À partir d'un certain rang N , on a $u_n \in [l - 1, l + 1]$ donc $|u_n| \leq |l| + 1$.

Avec $M = \max(|u_0|, \dots, |u_N|, |l| + 1)$, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$: la suite est bornée par M . $\square$

$\triangle$ La réciproque est fausse ! Par exemple, la suite $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

2. Divergence vers $\pm\infty$ (limite infinie) et divergence

Intuitivement, on dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si ses valeurs u_n sont arbitrairement grandes lorsque l'indice n tend vers l'infini.

Représentation :

Graphiquement, il faut que n'importe quel seuil (aussi haut soit-il) soit dépassé par *tous* les termes de la suite à partir d'un certain rang (apcr).

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A \quad (\text{resp } \leq A)$$

On note alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp $-\infty$).

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r < 0$. Montrons qu'elle diverge vers $-\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq A \iff u_0 + nr \leq A \iff n \geq \frac{A - u_0}{r}$ puisque $r < 0$.

En prenant $N = \max(0, \left\lfloor \frac{A - u_0}{r} \right\rfloor + 1)$, on a bien : $N \geq \frac{A - u_0}{r}$ donc pour tout $n \geq N$: $n \geq \frac{A - u_0}{r}$.

Ainsi : $\forall n \geq N, u_n \leq A$. C'est vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$, donc on a bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Propriété

Si une suite diverge vers $+\infty$ (resp $-\infty$), alors elle est minorée et non majorée (resp majorée et non minorée).

En particulier, on retrouve le résultat d'unicité de la limite.

On a donc 3 cas de figure possible pour la convergence d'une suite :

- Convergence vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
- Divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
- Divergence sans limite.

3. Opérations sur les limites

Pour calculer une limite à partir de suites usuelles dont on connaît les limites, on utilise les propriétés de sommes, produit et quotient de limites. On retiendra les formes indéterminées suivantes :

1. $\llbracket (+\infty) + (-\infty) \rrbracket$: avec par exemple $u_n = -n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

a) $v_n = n + 2$

b) $v_n = n^2 + n$

c) $v_n = n + (-1)^n$

2. $\llbracket 0 \times (\pm\infty) \rrbracket$: avec par exemple $u_n = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivantes :

a) $v_n = \frac{1}{n+1}$

b) $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

c) $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

3. $\llbracket \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \rrbracket$ et $\llbracket \frac{l}{0} \rrbracket$: à vous de trouver des exemples pour ces deux dernières!

⚠ Si on ne connaît pas le *signe d'une suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0, on ne peut rien dire de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$! (à part qu'elle n'est pas bornée)

Par contre, si par exemple on a $u_n > 0$ à pcr, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Méthode (Pour lever une forme indéterminée)

Les méthodes principales ont déjà été vues sur les fonctions. On peut :

- Factoriser par le terme dominant.
- Utiliser les croissances comparées des fonctions usuelles, ou celles des suites rappelées plus tard dans le chapitre.
- Utiliser les équivalents, introduits à la fin de ce chapitre.

Théorème (*Suites et continuité*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$

II Limites et inégalités

1. Quand on connaît la limite

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite finie $l > 0$, ou qui diverge vers $+\infty$.

Alors : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > 0$, ie : "à partir d'un certain rang, tous les termes sont strictement positifs".

Démonstration. Si la suite converge vers $l > 0$, prenons $\varepsilon = \frac{l}{2}$ (ou n'importe quel ε tel que $l - \varepsilon > 0$).

Alors :

Par convergence, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$. En particulier : $\forall n \geq N, u_n \geq l - \varepsilon > 0$. D'où le résultat.

Si la suite diverge vers $+\infty$, on applique la définition de la convergence à $A = 1 > 0$. $\square$

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite finie $l < 0$, ou qui diverge vers $-\infty$.

Alors : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < 0$: "à partir d'un certain rang, tous les termes sont strictement négatifs".

$\triangle$ Si une suite converge vers 0, on ne peut rien dire de son signe ! Par exemple : $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{-1}{n^2}, \frac{(-1)^n}{n}$

Théorème (*Passage à la limite dans les inégalités larges*)

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. On suppose que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$ avec $l, l' \in \mathbb{R}$;
- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

Alors : $l \leq l'$.

Démonstration. Si par l'absurde $l > l'$, la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers une limite $l' - l < 0$, mais dont tous les termes à pcr sont positifs ou nuls : c'est absurde d'après la proposition précédente. $\square$

Exemple

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

- Si une suite $(u_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite l est dans l'intervalle $[a, b]$.
- Si une suite $(u_n) \in]a, b[^{\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite l vérifie $l \in [a, b]$... et pas $]a, b[$ a priori !

$\triangle$ Le passage à la limite transforme toute inégalité en **inégalité large** !

Par exemple, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} < 1 < 1 + \frac{1}{n}$, et pourtant chaque membre de l'inégalité tend vers 1.

2. Pour obtenir la convergence ou divergence

Théorème (Comparaison à une suite divergente)

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration. On prouve le premier point, le second est identique.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et on veut montrer qu'il en va de même pour la suite (v_n) .

Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, u_n \geq A$.

Mais alors pour tout $n \geq \max(N, N_1)$, on a : $v_n \geq u_n \geq A$. Donc la suite (v_n) diverge bien vers $+\infty$. $\square$

$\triangle$ Si (u_n) converge vers une limite finie ou diverge vers $-\infty$, on ne peut **rien** dire de (v_n) !

Exemple

Étudions la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

Or on sait que $\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Par comparaison, on a donc $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Théorème (Théorème d'encadrement, dit "des gendarmes")

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles. On suppose que :

- les suites (u_n) et (w_n) convergent vers un **même** réel l .
- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Alors la suite (v_n) converge également vers l .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de (u_n) et (w_n) , on dispose de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, et de $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, w_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

Mais alors pour tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$, on a $l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon$, donc $v_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. D'où la convergence de (u_n) vers l . $\square$

Exemple

Étudions la convergence de la suite $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sin(n) \in [-1, 1]$, donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Or les suites $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ convergent toutes deux vers 0, donc par encadrement : $\frac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Exercice 1. Étudier la convergence des suites suivantes à l'aide des théorèmes de comparaisons et d'encadrement.

a) $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}, x \in \mathbb{R} \text{ fixé}$

b) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2 k}{n^3 + k^2}$

c) $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

III Théorèmes de convergence/divergence

1. Suites monotone

Théorème (*Théorème de la limite monotone*)

- Toute suite croissante et majorée converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
- Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et minorée converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
- Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. • On a montré ce point au chapitre 0!

Soit $l = \sup \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui existe puisque l'ensemble est non vide et majoré.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq l - \varepsilon$.

Mais alors pour tout $n \geq N$, par croissance, on a $u_n \geq u_N \geq l - \varepsilon$, et bien sûr $u_n \leq l$ puisque l majore la suite. D'où la convergence.

- Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme la suite est non majorée, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$. Mais par croissance : $\forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq A$. D'où la divergence vers $+\infty$.
- Si (u_n) est une suite décroissante et minorée, alors $(-u_n)$ est une suite croissante et majorée. $(-u_n)$ converge d'après le premier point, donc (u_n) converge également.
- On applique le deuxième point à la suite $(-u_n)$. □

Rappel. Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut, selon les cas :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 dans le cas où (u_n) est de signe constant strict.
- Lorsque $u_n = f(n)$, dresser le tableau de variations de f .

Exemple

On définit une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

1. Montrer que la suite (S_n) est bornée dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante, et conclure sur sa convergence.

2. Théorème sur les suites extraites

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et l qui désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l$$

Autrement dit :

- La suite converge si et seulement si chacune des deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite
- La suite diverge vers $\pm\infty$ si et seulement si c'est le cas de chacune des deux suites extraites.

Remarque. Il faut penser à ce théorème quand on a des suites définies différemment pour les rangs pairs et impairs, ou quand l'expression fait intervenir $(-1)^n$.

On utilise le résultat dans les deux sens :

- Pour montrer une convergence ou une divergence vers $\pm\infty$, en étudiant séparément les termes de rang pair et les termes de rang impair
- Pour montrer une divergence, en montrant que les deux suites extraites n'ont pas le même comportement à l'infini ou que l'une d'elles diverge.

Exemple

1. On peut maintenant démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$.
On en déduit que la suite (u_n) diverge.
2. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

3. Suites adjacentes

Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont **adjacentes** lorsque :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante (ou inversement)
- $(u_n - v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Théorème

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes.

Alors elles **convergent** vers une **même limite** $l \in \mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.

Démonstration. La suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, donc elle est majorée : il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n - v_n \leq M$.

Mais alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $u_n \leq M + v_n \leq M + v_0$ (par décroissance de (v_n))
- $u_n \geq u_n - M \geq u_0 - M$ (par croissance de (u_n))

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée (par $M + v_0$) donc elle converge vers un réel $l_u \in \mathbb{R}$.

De même, (v_n) est décroissante et minorée (par $u_0 - M$) donc elle converge vers un réel $l_v \in \mathbb{R}$.

Enfin, par opération, on a alors $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_v - l_u = 0$, donc $l_u = l_v$. □

Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} > u_n$.
- On a $v_n - u_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} - (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = -\frac{1}{n!} < 0.$$
- Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$. Cette limite est en fait la constante $e = \exp(1)$!
- On peut montrer que $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En effet, si par l'absurde on a $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, alors on écrit
$$u_q < u_{q+1} \leq e \leq v_{q+1} < v_q = u_q + \frac{1}{q!} \quad (\text{par théorème des suites adjacentes}).$$

On a $u_q < \frac{p}{q} < u_q + 1$. Or $q!u_q \in \mathbb{N}$, donc en multipliant l'inégalité par $q!$:

$q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$. C'est absurde (un entier ne peut pas être strictement compris entre deux entiers consécutifs). D'où $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

IV Croissances comparées et équivalents

1. Croissances comparées

Contrairement aux fonctions, seul le comportement en $+\infty$ nous intéresse. En plus des formes classiques liées aux fonctions usuelles, on rajoute à notre panoplie les suites $(n!)$ et (n^n) .

Proposition

Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. On a les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\beta}{e^{n^\gamma}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{n^\gamma}}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

On peut retenir sous forme résumée qu'en $+\infty$: $\ln(n)^\alpha \ll n^\beta \ll e^{n^\gamma} \ll n! \ll n^n$

Exemple

Calculer les limites des suites suivantes :

a) $\frac{4^n}{n!}$

b) $\frac{-n^2 + 3n - 4}{e^n + n^3 - 5n}$

c) $\frac{e^{\sqrt{\ln(n)}}}{n^3} \times 2^n$

d) $\frac{2^2 + n^2 - n - 1}{3^n - e^n - n \ln(n)}$

2. Équivalents usuels

On introduit dans la suite une notion qui permet d'exprimer l'idée que deux suites "croissent (ou décroissent) de la même manière" en $+\infty$.

Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

On dit que les suites sont **équivalentes**, en on note $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n}$, lorsque : $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Exemple

1. On cherche un équivalent simple de $2^n - n^5 + 3$ en $+\infty$. On a :

$$2^n - n^5 + 3 = 2^n \left(1 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{3}{2^n} \right), \text{ donc } \frac{2^n - n^5 + 3}{2^n} = 1 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{3}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi : $2^n - n^5 + 3 \underset{+\infty}{\sim} 2^n$. On obtient en fait le "terme dominant" !

2. Donner des équivalents simples en $+\infty$ de : a) $3n + 2n^3 + 1 - n^2$ b) $\sqrt{n^2 + n}$

3. **Fondamental** : Pour $l \in \mathbb{R}^*$, on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

4. ⚠ Ne jamais écrire $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$, cela n'a aucun sens !

Proposition (Équivalents usuels)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas à pcr, et qui **converge vers** 0, et $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Alors :

a) $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$

b) $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$

c) $\cos(u_n) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$

d) $e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$

e) $\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$

f) $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$

3. Utilisation des équivalents

On utilise les équivalents pour étudier la convergence, grâce au résultat suivant.

Proposition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles équivalentes. Alors (u_n) et (v_n) ont le **même comportement asymptotique**, c'est-à-dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge, et qu'elles ont la même limite le cas échéant.

⚠ Deux suites équivalentes n'ont pas nécessairement la même monotonie !

Pour calculer efficacement des équivalents, on peut effectuer *certaines* opérations :

Propriété

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) trois suites qui ne s'annulent pas à pcr. Alors :

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ (symétrie)
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ (transitivité)
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$, alors $u_n \times w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \times t_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{v_n}{t_n}$ (passage au produit et au quotient)
- Pour toute *constante* $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$

Exemple

Pour déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{(3n^2 + 1)(2n^2 - n + 5)}{(4n - 1)(-n^3 - n^2 + n)}$.

On sait que $3n^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$, $2n^2 - n + 5 \underset{+\infty}{\sim} 2n^2$, $4n - 1 \underset{+\infty}{\sim} 4n$ et $(-n^3 - n^2 + n) \underset{+\infty}{\sim} -n^3$.

Donc par produit et quotient, on a : $\frac{(3n^2 + 1)(2n^2 - n + 5)}{(4n - 1)(-n^3 - n^2 + n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3n^2 \times 2n^2}{4n \times (-n^3)} \sim \frac{6n^4}{-4n^4} \sim -\frac{3}{2} \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi, le quotient converge vers la limite finie $-\frac{3}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

⚠ Il n'y a aucun autre résultat avec les autres opérations, ne pas inventer de règle de calcul !

- **Ne jamais sommer des équivalents !** Par exemple avec $u_n = n^2 - n$ et $v_n = -n^2$.
- **Ne jamais composer des équivalents !** Par exemple en composant par l'exponentielle u_n et $w_n = n^2$.
- **Ne jamais élever à une puissance non constante !** Pour calculer la limite de $u_n^{v_n}$, on passera toujours par la forme exponentielle.

Exemple

Pour calculer la limite en $+\infty$ de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, on écrit $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

Or comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par équivalent usuel, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Ainsi, par produit : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1 \in \mathbb{R}^*$. On a donc $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Finalement, en composant par la fonction exponentielle qui est continue, on a $e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^1 = e$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

V Annexe : Suites implicites et suites définies par récurrence

1. Suites implicites

Certaines suites sont parfois définies de manière "implicite", c'est-à-dire qu'on définit u_n sans donner de moyen de calculer explicitement ses valeurs. C'est un type d'exercice assez classique, dont la méthode d'étude est vraiment spécifique.

Par exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n + x - 1$$

1. **Existence :** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \geq 0$ qui vérifie $f_n(x_n) = 0$. On définit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$.

Méthode : on dresse le tableau de variation de f_n sur l'intervalle qui nous intéresse.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1$. Ainsi, pour tout $x \geq 0$, on a $f'_n(x) \geq 1 > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, donc il existe bien un unique antécédent de 0.

2. **Minoration/majoration :** Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

Méthode : on utilise encore le tableau de variation.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$.

Ainsi, par stricte croissance de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$, on a nécessairement $0 < x_n < 1$.

3. **Monotonie :** Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Méthode : Pour comparer x_{n+1} à x_n , on compare $f_n(x_{n+1})$ à 0.

- Simplifier au maximum l'expression de $f_n(x_{n+1})$ en utilisant que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
- Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$, et conclure grâce à la monotonie de f_n .

Ici, on a $f_n(x_{n+1}) = (x_{n+1})^n + x_{n+1} - 1$.

Or on sait que $(x_{n+1})^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0$, donc $x_{n+1} - 1 = -(x_{n+1})^{n+1}$.

Ainsi : $f_n(x_{n+1}) = (x_{n+1})^n - (x_{n+1})^{n+1} = (x_{n+1})^n(1 - x_{n+1})$.

Or on a montré que $x_{n+1} \geq 0$ et que $1 - x_{n+1} \geq 0$, donc on a : $f_n(x_{n+1}) \geq 0$.

Finalement, par croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $x_{n+1} \geq x_n$.

D'où la croissance de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$

4. **Convergence** La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Méthode : Appliquer le théorème de la limite monotone. Ici, la suite est croissante et bornée par 1, donc elle converge vers un réel $l \in [0, 1]$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) = 0$. On définit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$.
2. Déterminer x_1 .
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est minorée par 0.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
5. Que peut-on en conclure quand à la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$? (bonus : déterminer la limite)

2. Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

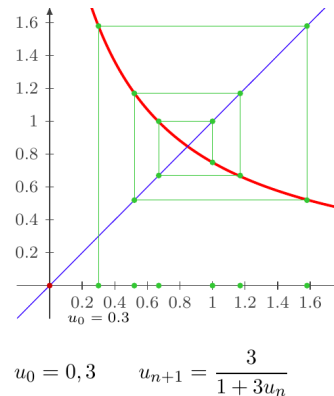
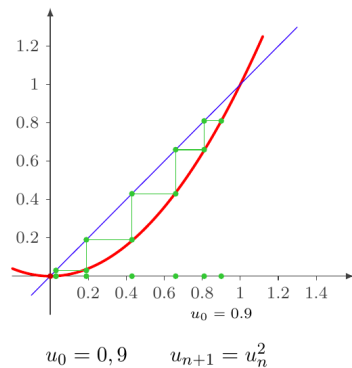
Soit une fonction f définie et continue sur $\mathcal{D}_f$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On souhaite étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_f \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Encore une fois, l'étude de ce type de suite est très spécifique.

1. Étude de la fonction f .

On commence toujours par étudier la fonction f (variations, limites) et tracer son graphe. Sur le même graphe, on trace aussi la droite d'équation $y = x$



2. Définition de la suite.

Pour que la suite soit bien définie, il faut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in \mathcal{D}_f$.

Il s'agit alors de trouver une **partie stable** par f et qui contient u_0 , c'est-à-dire une partie $A \subset \mathcal{D}_f$ telle que $f(A) \subset A$ et $u_0 \in A$.

On peut alors montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.

3. Limite éventuelle de la suite.

Si la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f$, alors $f(l) = l$: on dit que l est un **point fixe** de f .

On résout donc l'équation $f(l) = l$, pour obtenir les valeurs possibles pour une éventuelle limite.

4. Monotonie.

Pour étudier la monotonie de la suite, on peut :

- On peut parfois directement étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- On peut souvent étudier le signe de $g : x \in \mathcal{D}_f \mapsto f(x) - x$ afin d'obtenir le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Lorsque f est croissante, la suite est toujours monotone, ce qu'on démontre aisément par récurrence.
- Lorsque f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont toujours monotones, ce qu'on démontre également par récurrence. Mais attention, la suite (u_n) peut être monotone ou non dans ce cas !

5. Convergence.

Une fois qu'on connaît la monotonie de la suite, on peut souvent utiliser le théorème de convergence monotone.

- Si on sait que la suite converge, comme on connaît la valeur des limites éventuelles (points fixes de f), il reste à *localiser* la limite, par exemple par passage à la limite dans les inégalités, ou bien par élimination.
- Si on veut montrer que la suite diverge vers $\pm\infty$, on peut parfois raisonner par l'absurde : on suppose que la suite converge, on connaît alors sa limite par la méthode si-dessus, et on montre que c'est impossible.
- Dans le cas où f est décroissante, on peut utiliser les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour conclure sur la convergence.

Exemple

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Déterminer les limites éventuelles de la suite (u_n) .
3. On suppose que $u_0 \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite, et en déduire sa convergence.
4. On suppose que $u_0 < 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$, et étudier la monotonie et la convergence de (u_n) .
5. Que peut-on dire, dans le cas où $u_0 > 1$?

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f associée.
2. Montrer que $[0, 1]$ et $]1, +\infty]$ sont des intervalles stables par f .
3. Déterminer les valeurs possibles pour une éventuelle limite de la suite (u_n) .
4. Étudier le signe de $f(x) - x$.
5. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_0 \in [0, 1]$, et si $u_0 > 1$.

Exercice 5. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [-2; +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{1 + 3u_n}$.

1. Étudier les variations de la fonction f associée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Expliquer pourquoi on peut supposer que $u_0 \in [0, 3]$.
3. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, et en déduire qu'elles convergent.
4. Déterminer la limite de chacune de ces suites. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?