

Chapitre 14 – Vecteurs du plan et de l'espace

I Généralités sur les vecteurs

1. Définitions

Définition

On définit un vecteurs du plan comme étant un couple de $\mathbb{R}^2$, souvent noté $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en colonne.

On définit un vecteur de d'espace comme étant un triplet de $\mathbb{R}^3$, souvent noté $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en colonne.

Remarque. Un vecteur représente une **translation** du plan ou de l'espace. Il est équivalent à la donnée d'une direction, d'un sens et d'une norme, comme vu au lycée. Dans ce chapitre, nous étudierons les vecteurs d'un **point de vue algébrique** (en raisonnant avec les coordonnées dans un repère ou une base fixée), même si une visualisation géométrique sera indispensable.

Définition

On définit le vecteur nul comme étant $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (dans le plan), ou $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (dans l'espace).

Définition

Soient A, B deux points du plan, dont on note les coordonnées $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme étant le vecteur $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

On définit de même le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le cas où A et B sont des points de l'espace.

Remarque. $\triangle$ Il ne faut pas confondre les points et les vecteurs !

Ils sont tous représentés par des couples (ou des triplets) de coordonnées, donc des éléments de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$). Cependant, là où les points représentent une position immuable du plan ou de l'espace, les vecteurs représentent un *déplacement*.

Propriété

Soient A, B, C, D quatre points. Alors :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

Définition

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur du plan, et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Alors on définit :

- la norme de $\vec{u}$ comme étant le réel positif : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- la norme de $\vec{w}$ comme étant le réel positif : $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque. La norme d'un vecteur représente sa longueur. Ainsi, pour tous points A, B , on a : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. De plus, pour tout vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Additionner deux points n'a aucun sens ! Cependant, on dispose de plusieurs opérations bien utiles sur les vecteurs, qu'on définit ci-dessous.

2. Opérations

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On définit alors :

- la somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, comme étant le vecteur $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- le produit de $\vec{u}$ par λ , comme étant le vecteur $\lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Les opérations s'effectuent *coordonnée par coordonnée*.

On définit de la même manière la somme de deux vecteurs de l'espace et le produit d'un vecteur de l'espace par un scalaire.

Remarque. • Géométriquement, la somme correspond à l'enchaînement des deux vecteurs, et la multiplication par un scalaire correspond à la "dilatation" du vecteur par un facteur λ .

- On définit l'opposé du vecteur $\vec{u}$ comme étant $-\vec{u} = -1 \vec{u}$, puis la soustraction $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. L'opposé est le vecteur de même direction et de même norme mais de sens opposé.

Propriété

On se place dans le plan ou dans l'espace. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de la somme)
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité de la somme)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (neutre et opposé)
- $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda\mu) \vec{u}$ (associativité externe)
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$ et $(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}$ (distributivités)

Définition

On se place dans le plan ou dans l'espace. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs.

On appelle **combinaison linéaire** de ces vecteurs tout vecteur de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des scalaires.

II Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires

1. Définitions

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (du plan ou de l'espace) sont dits **colinéaires** si l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

De manière équivalente (et plus élégante), on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$.

On dit alors que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est **liée**.

Définition

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont dits **coplanaires** si l'un est combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que par exemple $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$.

De manière équivalente (et plus élégante), on dit que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires s'il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{0}$.

On dit alors que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **liée**.

Remarque. • Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan et de l'espace.

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.
- On définira la notion générale de *famille liée* : une famille de vecteurs est liée si et seulement si il existe une combinaison linéaire non triviale de ces vecteurs qui donne le vecteur nul.
- Une famille qui n'est pas liée est dite **libre**.

Propriété

- Trois points A, B, C (du plan ou de l'espace) sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Quatre points A, B, C, D de l'espace sont contenus dans un même plan si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

2. Déterminant dans le plan

Définition

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs **du plan**. On définit leur **déterminant** par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Alors : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Démonstration. Notons $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors le déterminant est bien nul. Sinon, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, et on a alors $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. D'où $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda xy - \lambda xy = 0$.
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$: Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires. Sinon, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Avec par exemple $x \neq 0$, en posant $\lambda = \frac{x'}{x}$, on a bien $x' = \lambda x$, et $y' = \frac{x'y}{x} = \lambda y$. Idem si $y \neq 0$ en posant $\lambda = \frac{y'}{y}$. Dans tous les cas : $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

□

III Droites et cercles du plan

1. Droites

Définition

Soient A, B deux points distincts (du plan ou de l'espace). On définit la droite (AB) comme étant l'ensemble des points M tels que A, B, M sont alignés, c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **un vecteur directeur** de la droite.

Remarque. Une droite peut être définie, selon les cas, par :

- deux points distincts ;
- un point et un vecteur directeur non nul ;
- un point et un vecteur normal dans le cas du plan.

Dans toute la suite de cette section, on se place dans le plan.

Proposition

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan passant par un point $A(x_A, y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Alors un point $M(x, y)$ est sur cette droite si et seulement si il existe un réel $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x &= x_A + t\alpha \\ y &= y_A + t\beta \end{cases}$$

Réciproquement, un tel système à paramètre représente toujours une droite du plan, passant par (x_A, y_A) et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

Une telle représentation est appelée **une représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration. $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Ainsi : $M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, x - x_A = t\alpha \text{ et } y - y_A = t\beta$. □

Proposition (Équations cartésiennes d'une droite)

Les droites du plan sont exactement les ensembles de points sous la forme :

$$\mathcal{D} = \left\{ M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \right\}, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$$

et le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit (AB) une droite. On note $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \end{pmatrix}$. Alors, pour tout point $M(x, y)$, on a : $M \in (AB) \iff A, B, M \text{ sont alignés} \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires}$

$$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_d \\ y - y_A & y_d \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff y_d(x - x_A) - x_d(y - y_A) = 0$$

$$\iff y_d x - x_d y + x_d y_A - x_A y_d = 0$$

Donc on a bien $\mathcal{D} = \{ M(x, y) \mid ax + by + c = 0 \}$ avec $a = y_d$, $b = -x_d$ et $c = x_d y_A - x_A y_d$.

De plus, on a alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors on peut trouver un point $A(x_A, y_A) \in \mathcal{D} = \{M(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$. Alors, pour tout point $M(x, y)$, on a :

$$M \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = ax_A + by_A + c$$

$$\iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \det(\overrightarrow{MA}, \vec{u}) = 0 \text{ où } \vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \iff M, A, B \text{ sont alignés, où } B \text{ est tel que } \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ est exactement la droite (AB) , qui est alors dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. $\square$

Remarque. $\triangle$ Une droite possède une infinité d'équations cartésiennes, (obtenues en multipliant les coefficients a, b, c par une même constante non nulle).

Proposition (Équation réduite)

Si une droite n'est pas dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors elle admet une unique équation cartésienne de la forme $y = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$.

Cette équation est alors appelée l'**équation réduite** de la droite.

m est appelé le coefficient directeur de la droite, et p son ordonnée à l'origine.

2. Cercles

Définition

Soit O un point du plan, et R un réel positif. On appelle cercle de centre O et de rayon R l'ensemble des points du plan qui sont à distance D de R .

Il s'agit des points qui vérifient l'équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Proposition

Les cercles du plan sont exactement les ensembles de points du plan qui admettent une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$.

Une telle équation est appelée une **équation cartésienne** du cercle,

Démonstration. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$

Ainsi, $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ et $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$ conviennent. On a bien $a^2 + b^2 - 4c = 4R^2 \geq 0$

Réciproquement, si a, b, c sont donnés, alors $x_0 = -\frac{a}{2}$, $y_0 = -\frac{b}{2}$ et $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ conviennent. $\square$

IV Plans et droites de l'espace

Dans toute cette section, on se place dans l'espace.

1. Plans

Définition

- Soient A, B, C trois points distincts de l'espace non alignés. On définit le plan passant par A, B, C comme étant l'ensemble des points M tels que A, B, C, M sont coplanaires.
- Soit A un point de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On définit le plan passant par A et **dirigé par** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme étant l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$ sont coplanaires.

Remarque. Un plan de l'espace peut être défini, selon les cas, par :

- trois points non alignés ;
- un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires ;
- un point et un vecteur normal (cf plus tard).

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

Alors un point $M(x, y, z)$ est sur cette droite si et seulement si il existe deux réels $t, s \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + s\alpha' \\ y = y_A + t\beta + s\beta' \\ z = z_A + t\gamma + s\gamma' \end{cases}$$

Réciproquement, un tel système à paramètre représente toujours un plan, passant par (x_A, y_A, z_A) et dirigé par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$.

Une telle représentation est appelée **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$.

Démonstration. $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, si et seulement si il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$.

Ainsi : $M \in \mathcal{D} \iff \exists t, s \in \mathbb{R}, x - x_A = t\alpha + s\alpha' \text{ et } y - y_A = t\beta + s\beta' \text{ et } z - z_A = t\gamma + s\gamma'.$ □

Proposition (Équations cartésiennes d'un plan)

Les droites du plan sont exactement les ensembles de points sous la forme :

$$\mathcal{P} = \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0 \right\}, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

2. Droites dans l'espace

Proposition

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Alors un point $M(x, y, z)$ est sur cette droite si et seulement si il existe un réel $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

Réciproquement, un tel système à paramètre représente toujours une droite du plan, passant par (x_A, y_A, z_A) et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Une telle représentation est appelée **représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Proposition (Équations cartésiennes d'une droite)

Les droites du plan sont exactement les intersections de deux plans non parallèles.

Ce sont donc exactement les ensembles de points (x, y, z) de l'espace qui vérifient des système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

où $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ avec (a, b, c) et (a', b', c') non proportionnels.

V Orthogonalité, produit scalaire

Deux vecteurs du plan ou de l'espace sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont perpendiculaires.

1. Le produit scalaire

Définition

- Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs du plan.
On définit leur produit scalaire comme étant le réel : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'$
- Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace.
On définit leur produit scalaire comme étant le réel : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$
- Deux vecteurs sont dits **orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul**.

Propriété

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs (du plan ou de l'espace), et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (symétrie)
- $\langle (\vec{u} + \vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ et $\langle \vec{u}, (\vec{v} + \vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
 $\langle (\lambda \vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, (\lambda \vec{v}) \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (bilinéarité)
- $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ (défini positif)

Démonstration. Par exemple dans le plan, en notant $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$:

- $xx' + yy' = x'x + y'y$
- $(x + x')x'' + (y + y')y'' = (xx'' + yy'') + (x'x'' + y'y'')$, et de même pour l'autre côté par symétrie.
 $(\lambda x)x' + (\lambda y)y' = x(\lambda x') + y(\lambda y') = \lambda(xx' + yy')$
- $x^2 + y^2 \geq 0$, et on a $x^2 + y^2 = 0 \iff x^2 = y^2 = 0 \iff x = y = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

□

Proposition

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.

On a les résultats essentiels suivants, que vous reverrez en deuxième année sur des espaces plus généraux.

1. **Cauchy-Schwarz** : $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
2. **Inégalité triangulaire** : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
3. **Pythagore** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Démonstration. On fait la preuve dans le plan, en notant $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. On a $\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2 = x^2y'^2 + y^2x'^2 - 2xx'y'y' = (xy' - yx')^2 \geq 0$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
D'après Cauchy-Schwarz, $2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, donc :
 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$
3. D'après le développement ci-dessus, on a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. D'où :
 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \iff 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

□

2. Projeté orthogonal

Définition

Soit A un point et $\mathcal{D}$ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

Alors il existe un unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

H est alors appelé le **projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$** .

On appelle distance de A à $\mathcal{D}$ la distance AH , et on la note $d(A, \mathcal{D})$.

Définition

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Alors il existe un unique point $H \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

H est alors appelé le **projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$** .

On appelle distance de A à $\mathcal{P}$ la distance AH , et on la note $d(A, \mathcal{P})$.

Proposition

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs (du plan ou de l'espace), et A, B, C trois points associés, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Alors, en notant H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , on a :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \pm AH \times AB$$

où le signe dépend de si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens égaux ou opposés. On a aussi :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle =$$

$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$ où θ est l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AB}, (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} \rangle \end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux (par définition du projeté orthogonal).

Or A, B, H sont alignés, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \lambda \overrightarrow{AB} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \lambda \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\| \times (\pm |\lambda| \|\overrightarrow{AB}\|) = \pm \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AH}\|.$$

D'où la caractérisation par le projeté. Celle par le cosinus s'ensuit en appliquant la trigonométrie au triangle rectangle AHC . $\square$

Remarque. Cette caractérisation du produit scalaire donne immédiatement Cauchy-Schwarz.

3. Vecteurs normaux

Définition

- Soit $\mathcal{D}$ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

On appelle **vecteur normal** tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$.

- Soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On appelle **vecteur normal** tout vecteur $\vec{n}$ non nul, orthogonal simultanément à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Proposition

- Soit M un point et $\vec{n}$ un vecteur du plan.
Alors il existe une unique droite $\mathcal{D}$ qui passe par M et qui admette $\vec{n}$ comme vecteur normal.
De plus, si $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.
- Soit M un point et $\vec{n}$ un vecteur de l'espace.
Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ qui passe par M et qui admette $\vec{n}$ comme vecteur normal.
De plus, si $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

VI Méthodes (?)

1. Déterminer une équation de droite, plan ou cercle

Équation paramétrique de droite :

- à partir d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ écrire que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ (équation paramétrique)
- à partir de deux points A et B : se ramener au cas précédent en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur directeur.

Droite dans le plan :

- dans le plan à partir d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$, écrire $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ (cartésienne).
- à partir d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{u}$ (dans le plan) : écrire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ (cartésienne).

Plan :

- à partir d'un point A et de deux vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{v}$: écrire $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$ (paramétrique)
- à partir d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$: écrire que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- à partir de trois points A, B, C : écrire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan (équation paramétrique), ou déterminer un vecteur $\vec{n}$ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$, et se ramener à un des deux cas précédents.

Cercle du plan :

- à partir du centre O et du rayon R , écrire que $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = R^2$.
- à partir du centre O et d'un point A du cercle, écrire que $\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2$
- à partir d'un diamètre $[AB]$ du cercle, écrire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2. Passer d'une équation à l'autre :

- Pour passer d'une équation cartésienne à une équation paramétrique :
 1. Je visualise mon équation cartésienne comme un système linéaire à une seule équation. Ainsi, toutes les inconnues sauf une sont des inconnues secondaires.
 2. Je passe les inconnues secondaires en second membre, comme paramètres, et je les renomme.
- Pour passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne :
 1. J'utilise toutes les équations sauf une pour exprimer les paramètres en fonction des coordonnées.
 2. Je réinjecte dans l'équation que je n'ai pas utilisée, et je simplifie l'équation obtenue.

3. Déterminer des intersections

Les intersections faisant intervenir des droites et des plans s'écrivent toujours sous la forme d'un système linéaire, qu'on sait donc bien résoudre. On obtiendra 0, 1 ou une infinité de points d'intersection selon la compatibilité et le rang.

Pour obtenir l'intersection d'une droite et d'un cercle du plan, on utilise l'équation de la droite pour exprimer x en fonction de y (ou vice versa), et on réinjecte dans l'équation du cercle, ce qui nous donne une équation de degré 2 à résoudre. On obtient 0, 1 ou 2 points d'intersection selon les cas. Pour obtenir l'intersection de deux cercles, la soustraction des deux équations cartésiennes donnera toujours une équation de droite, qui nous permet de nous ramener au cas précédent.