

Chapitre 15 – Partie 1 – Limites de fonctions réelles

La définition de la limite pour les fonctions est analogue à celle que l'on a vu pour les suites. Cependant, contrairement aux suites pour lesquelles on ne s'intéresse qu'à la limite quand n tend vers $+\infty$, la situation est un peu plus compliquée dans le cas des fonctions. En effet, puisque l'on peut considérer aussi bien des limites en l'infini qu'en des points de $\mathbb{R}$ (et vers lesquels on peut s'approcher de différentes façons : par la droite, par la gauche, des deux côtés), plusieurs cas de figures et différentes notions doivent être introduites.

Intuitivement, une fonction f tend vers une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ lorsque x tend vers $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si $f(x)$ s'approche arbitrairement de l quand x s'approche de x_0 (ce qui se traduit différemment selon que x_0 et l sont réels ou infinis).

I Définitions, premières propriétés

Les propriétés liées à la limite sur les suites étaient souvent vraies "à partir d'un certain rang". Pour les fonctions, cela se traduit par des propriétés vraies "au voisinage de x_0 ", où x_0 est le point où l'on cherche la limite. Définissons cette notion.

Définition

Soit f une fonction réelle et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que :

- f est définie au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle I contenant x_0 (et non réduit à x_0) tel que $I \setminus \{x_0\} \subset \mathcal{D}_f$.
- f est définie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset \mathcal{D}_f$.
- f est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, a] \subset \mathcal{D}_f$.

Exemple

1. Les fonctions suivantes sont définies au voisinage de 0 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{cases} \quad i : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{cases}$$

2. Elles sont également toutes définies au voisinage de $+\infty$, mais seules f et h sont définies au voisinage de $-\infty$.
3. En pratique, un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ sera d'une des formes suivantes :

- $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$
- $[x_0 - \alpha, x_0]$
- $[x_0, x_0 + \alpha]$
- $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha]$
- $[x_0 - \alpha, x_0[$
- $]x_0, x_0 + \alpha]$

1. Limite finie ou infinie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0 , et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f **admet pour limite l en x_0** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.

Représentation graphique :

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0 . On dit que :

- f admet pour limite $+\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq M)$$

- f admet pour limite $-\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, (|x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \leq m)$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm\infty$.

Représentation graphique :

Exemple

On peut montrer que $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en 0.

Soit $M \in \mathbb{R}$. On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$, $f(x) \geq M$.

Prenons $\alpha = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ qui vérifie $|x| \leq \alpha$, on a $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\frac{1}{M}} = M$. D'où la limite.

2. Limite finie ou infinie en $\pm\infty$

Définition (*Limite finie en $\pm\infty$*)

- Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, (x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$.

- Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $-\infty$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que f admet pour limite l en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, (x \leq a \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$.

- On dit que la courbe représentative de f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = l$

Représentation graphique :

Définition (*Limite infinie en l'infini*)

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. On dit que :

- f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x \geq A \implies f(x) \geq M)$.
- f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ lorsque $\forall m \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x \geq A \implies f(x) \leq m)$.

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $-\infty$. On dit que :

- f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ lorsque $\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x \leq a \implies f(x) \geq M)$.
- f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ lorsque $\forall m \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, (x \leq a \implies f(x) \leq m)$.

Représentation graphique :

3. Unicité de la limite

Proposition

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et f définie au voisinage de x_0 .

- Si f admet une limite (finie ou infinie) en x_0 , alors **cette limite est unique**.
- Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors la seule limite possible de f en x_0 est $f(x_0)$.

Autrement dit, soit f tend vers $f(x_0)$, soit f n'a pas de limite en x_0 !

Remarque. Si une fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 , on ne peut pas a priori affirmer qu'alors f est bornée ! On peut simplement affirmer que f est bornée **au voisinage de x_0** .

De même, si f tend vers $+\infty$ en x_0 , on peut affirmer qu'elle n'est pas majorée, mais on ne peut pas affirmer qu'elle est minorée (seulement qu'elle l'est au voisinage de x_0) !

4. Limites à gauche ou à droite

Définition

- On dit que f admet pour limite l **à droite** en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0, x_0 + \alpha], \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$, ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$.

- On dit que f admet pour limite l **à gauche** en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [x_0 - \alpha, x_0[, \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$, ou encore $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.

- On a des définitions similaires pour une limite *infinie* à gauche ou à droite en x_0 .

Représentation graphique :

Proposition

- Si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$
- Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff l = f(x_0) \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$

Exemple

- On peut montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

En effet, pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, et pour $x < 0$, on a $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$. Ainsi, f admet bien des limites à gauche et à droite en 0, qui valent respectivement -1 et 1 . Ces limites étant différentes, f n'admet pas la limite (globale) en 0.

- De même, la fonction partie entière n'admet de limite en aucun point entier.

- Par contre, la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{sinon} \end{cases}$ est bien continue en 0. En effet :

Définition

On dit que la courbe représentative de f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$ lorsque f admet une limite infinie **à gauche ou à droite** en x_0 .

II Opérations

On peut appliquer les **opérations arithmétiques** sur les limites comme vu précédemment, en prenant garde aux formes indéterminées : multiplication par une constante, somme et produit de deux fonctions, inverse d'une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0 , quotient (même condition).

Attention notamment à la forme indéterminée « $\frac{l}{0}$ » si on ne connaît pas le signe de la fonction au dénominateur !

Proposition (Composition de limites)

Soient $x_0, l, l' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient f et g deux fonctions, avec $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, et f définie au voisinage de x_0 .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{y \rightarrow l} g(y) = l', \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l'$$

III Limites et inégalités

Nombre de propriétés vues sur les suites sont encore valables sur les limites de fonctions, notamment : le lien avec le signe, le passage à la limite dans les inégalités larges, les résultats de comparaisons et d'encadrement, et le théorème de la limite monotone.

Dans toute la fin du chapitre, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f, g, h sont des fonctions définies sur le même domaine au voisinage de x_0 .

1. Limites et signe

Proposition

On suppose que f admet une limite l (finie ou infinie) en x_0 .

- Si $l > 0$ ou $l = +\infty$, alors f est à valeurs strictement positives **au voisinage de x_0** .
- Si $l < 0$ ou $l = -\infty$, alors f est à valeurs strictement négatives **au voisinage de x_0** .
- $\triangleleft$ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = 0$, on ne peut rien dire !

2. Passage à la limite dans les inégalités larges

Proposition

Si on suppose que f et g ont admettent des limites finies $l, l' \in \mathbb{R}$ en x_0 , et que $f \leq g$ au voisinage de x_0 , alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Exemple

- Si $f(x) \geq a$ au voisinage de x_0 , et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors nécessairement on a encore $l \geq a$.
Ainsi, les majorations/minorations au voisinage de x_0 se transmettent naturellement à la limite.
- $\triangleleft$ Le passage à la limite **transforme toutes les inégalités en inégalités larges** !
Par exemple, même si on sait que $f(x) \in]a, b[$ au voisinage de x_0 , on peut seulement en déduire que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in [a, b]$.

3. Comparaisons et encadrement

Proposition

On suppose que $f \leq g$ au voisinage de x_0 .

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Proposition (Théorème d'encadrement, dit "des gendarme")

On suppose que $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0 , et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$.

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

Exemple

On peut montrer par encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\sin(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ puisque $x^2 > 0$.

Mais on sait que $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$.

Ainsi, par encadrement, on a nécessairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

4. Théorème de la limite monotone

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors :

- f admet une limite (à gauche) en b , qui est finie si f est majorée et vaut $+\infty$ sinon.
- f admet une limite (à droite) en a , qui est finie si f est minorée et vaut $-\infty$ sinon.
- f admet des limites à gauche et à droite en tout $x_0 \in]a, b[$, qui vérifient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

On a évidemment un analogue de cette proposition dans le cas où f est décroissante.

IV Équivalents

1. Définition et équivalents usuels

Définition

On dit que les fonctions sont **équivalentes au voisinage de x_0** , en on note $\boxed{f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)}$, lorsqu'on peut écrire $f(x) = \varphi(x)g(x)$, avec φ une fonction définie au voisinage de x_0 , et qui tend vers 1 en x_0 .

Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0 , ceci est équivalent à : $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$

Exemple

1. Avec $f(x) = x^4 - 2e^x - 1$, on peut montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -2e^x$.

En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{-2e^x} = -\frac{x^4}{2e^x} + 1 + \frac{1}{2e^x}$, où $\frac{x^4}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée et $\frac{1}{2e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par opérations.

Ainsi, le quotient tend bien vers 1 en $+\infty$.

2. Pour tout $l \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff f(x) \underset{x_0}{\sim} l$
3. Au voisinage de $\pm\infty$, toute fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré.
Au voisinage de 0, par contre, toute fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus bas degré!

Proposition

Au voisinage de 0, on a les équivalents suivants :

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|--|
| a) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ | b) $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ | c) $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ |
| d) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ | e) $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ | f) $(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$ |

En particulier : $\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$.

2. Utilisation des équivalents

Proposition

On suppose que $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$. Alors :

- Si f ne s'annule pas au voisinage de x_0 , alors g non plus, et les deux fonctions ont le même signe au voisinage de x_0 .
- Si f admet une limite (finie ou infinie) en x_0 , alors il en va de même pour g , et leurs limites sont égales.

Propriété (Opérations)

Soient f, g, h, f_1, g_1 des fonctions définies au voisinage de x_0 . Alors :

- $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$ (symétrie)
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$ (transitivité)
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $|f(x)| \underset{x_0}{\sim} |g(x)|$.
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $f_1(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x)$, alors $f(x)f_1(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)g_1(x)$, et si de plus f_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 : $\frac{f(x)}{f_1(x)} \underset{x_0}{\sim} \frac{g(x)}{g_1(x)}$.
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, f(x)^n \underset{x_0}{\sim} g(x)^n$.
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $f > 0$ au voisinage de x_0 , alors pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R}, f(x)^\alpha \underset{x_0}{\sim} g(x)^\alpha$.

Remarque. Les équivalents ne sont pas compatibles avec l'addition, ni avec la composition !
On prendra garde également à ne jamais passer à une puissance non constante dans un équivalent.

Proposition (Substitution)

Soient f, g deux fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D}$ et équivalentes en x_0 .
 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, et u une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$, et telle que $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$. Alors :

$$f(u(t)) \underset{t_0}{\sim} g(u(t))$$

On dit qu'on a fait la substitution $x = u(t)$.

Exemple

Donner un équivalent simple de :

- $\sin(4x)$ en 0 :
- $e^{x^2+x} - 1$ en 0 :
- $\ln(\cos(t))$ en 0 :
- $x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$:

Déterminer la limite de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

3. De l'importance des équivalents en 0

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On peut ramener n'importe quel calcul de limite ou d'équivalent au voisinage de x_0 à un calcul au voisinage de 0, en posant $x = x_0 + h$, avec $h \rightarrow 0$.

Exemple

Déterminer un équivalent en 1 de $f(x) = \frac{e^{1-x} - 1}{x^2 - 1}$.

On pose $x = 1 + h$. On a alors $f(x) = \frac{e^h - 1}{h^2 + 2h}$.

Or $h = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, et $e^h - 1 \underset{0}{\sim} h$ et $h^2 + 2h = 2h(1 + \frac{h}{2}) \underset{0}{\sim} 2h$.

D'où $\frac{e^h - 1}{h^2 + 2h} \underset{0}{\sim} \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$, et donc $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$.

V Négligeabilité

Définition

On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0 lorsqu'on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, avec ε une fonction définie au voisinage de x_0 , et qui tend vers 0 en x_0 .

Lorsque g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , ceci est équivalent à : $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$

Exemple

- $x^2 \underset{0}{=} o(x)$, avec $\varepsilon(x) = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$, avec $\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- $\frac{1}{x^3} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x \ln(x)}\right)$, avec $\varepsilon(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissances comparées.
- $f \underset{x_0}{=} o(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Proposition

Les croissances comparées peuvent toutes se formuler sous forme de négligeabilité, de la manière suivante : pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$, on a :

- Au voisinage de $+\infty$:
 - $\ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$
 - $x^\beta \underset{+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$
 - $e^{-\gamma x} \underset{+\infty}{=} o(x^{-\beta})$
- Au voisinage de 0 : $\ln(|x|)^\alpha \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$, i.e. $\ln(|x|)^\alpha x^\beta \underset{0}{=} o(1)$

Propriété (Règles de calcul)

Soient f, g, h, f_1, g_1 des fonctions définies sur un même domaine au voisinage de x_0 .

- Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
- Si $f = o(g)$, alors $|f| = o(|g|)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f = o(g)$
- Si $f = o(g)$ et $f_1 = o(g)$, alors $f + f_1 = o(g)$.
- Si $f = o(g)$ et $f_1 = o(g_1)$, alors $f \times f_1 = o(g \times g_1)$.

Proposition (Substitution)

Soient f, g deux fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D}$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, et u une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$, et telle que $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$.

$$\text{Si } f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } f(u(t)) \underset{t_0}{=} o(g(u(t)))$$

On dit qu'on a fait la substitution $x = u(t)$.