

Chapitre 15 – Partie 2 – Fonctions continues

I Définitions

1. Continuité en un point

Définition

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

On dit que f est **continue en** x_0 lorsque f admet pour limite $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 , ie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque. On a vu que si f admet une limite en x_0 , alors cette limite est nécessairement $f(x_0)$!

Exemple

La fonction valeur absolue est continue en 0, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$.

Définition

On dit que f est :

- **continue à droite en** x_0 lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- **continue à gauche en** x_0 lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Exemple

La fonction partie entière est continue à droite en 0, mais pas à gauche ! Elle est continue seulement à droite en tous les entiers.

Proposition

Si x_0 n'est pas une extrémité du domaine de définitions de f , alors :

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue **à gauche et à droite** en x_0 , donc si et seulement si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Exemple

La fonction partie entière n'est donc pas continue en 0, puisqu'elle n'est pas continue à gauche. Elle n'est continue en aucun entier.

Exercice 1. Étudier la continuité aux points de raccord des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x^2} & \text{si } x > 2 \\ \frac{\ln(1+x^2)}{2x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. Continuité sur un intervalle

Définition

Soit I un intervalle.

- On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue sur** I lorsque f est continue en **tout** point de I .
- On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I .
- Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le domaine de définition, on dira simplement que f est **continue**.

II Fonctions usuelles et opérations

Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition, sauf la partie entière !

- Les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:
- La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction tangente est continue sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
- $\forall \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}, x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}, x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les propriétés d'opérations sur les limites permettent d'énoncer les résultats suivants.

Proposition

Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f et g sont continues en x_0 , alors :

- $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0 .
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue en x_0 .
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0 .

Corollaire

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f + g, f \times g, \lambda f \in \mathcal{C}^0(I)$.
- Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I)$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$, et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors : $g \circ f$ est continue en x_0 .

Corollaire

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$ avec I et J deux intervalles, et $f(I) \subset J$. Alors : $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Exemple

Si f est continue sur I , alors $|f|$ aussi.

Si de plus f est à valeurs positives, alors $\sqrt{f}$ est aussi continue sur I .

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

a) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

b) $g(x) = \frac{\ln(e^{-x^2} + 3)}{x}$

$$c) h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$d) h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{\tan(\pi x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Théorème (Continuité et suites)

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On a :

f est continue en $x_0 \iff$ pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} : \left(u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0 \implies f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x_0) \right)$.

Exemple

On utilise beaucoup ce résultat pour obtenir la limite d'une suite de la forme $f(u_n)$ avec f continue. Notons qu'on peut aussi l'utiliser pour montrer qu'une fonction n'est **pas continue** en un point x_0 . Par exemple, montrons que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue en 0.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2\pi n}$. Alors on a $(u_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = \cos(2\pi n) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \neq f(0)$.

Ainsi, la fonction f ne peut pas être continue en 0.

III Prolongements par continuité

Quand une fonction est définie **au voisinage** d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, mais qu'elle n'est **pas définie en** x_0 , on peut vouloir essayer de donner une valeur à $f(x_0)$ de sorte à garder la continuité.

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **non définie en** x_0 , mais qui admet une **limite finie** l quand x tend vers x_0 .

Alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathcal{D}_f \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0 .

$\tilde{f}$ s'appelle le **prolongement par continuité de** f **en** x_0 . Par abus, on le note encore souvent f .

Exemple

- Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. f est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ en 0, donc elle admet pour limite finie 1 quand x tend vers 0.

Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.

Comme f était continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, son prolongement est continu sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de prolongement par continuité en 0, puisqu'elle n'admet pas de limite en 0. On peut le montrer à l'aide du théorème sur les suites, en utilisant par exemple les suites $\left(\frac{1}{2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\pi + 2n\pi}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, qui tendent toutes les deux vers 0, mais dont les images tendent respectivement vers 1 et -1.

⚠ Attention à ne pas confondre les deux situations suivantes :

1. On vous donne une fonction **définie par raccord**, et vous devez déterminer si elle est ou non continue.
2. On vous donne une fonction **non définie en** x_0 , et vous devez déterminer si elle admet un prolongement par continuité en x_0 .

IV Trois théorèmes essentiels

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leq b$.

Alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f dans $[a, b]$.

Autrement dit : $\forall y \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), $\exists c \in [a, b]$, $f(c) = y$.

Démonstration. On suppose que $f(a) \leq y \leq f(b)$. On va construire des suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. On utilise le procédé suivant :

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Si a_n et b_n sont construits, on sait qu'on a $f(a_n) \leq f(b_n)$. Posons m la moyenne de a_n et b_n : $m = \frac{a_n + b_n}{2}$. Alors on a nécessairement $f(a_n) \leq y \leq f(m)$ ou $f(m) \leq y \leq f(b_n)$. Dans le premier cas, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Sinon, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Dans les deux cas, on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, et $f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$. De plus, on a divisé par 2 la différence des termes : $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
- Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont ainsi bien définies et adjacentes, donc elles convergent vers un même réel $c \in [a, b]$.
- On sait que par continuité, $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers $f(c)$. Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$, on a nécessairement, par passage à la limite dans les inégalités larges : $f(c) \leq y \leq f(c)$, c'est-à-dire $f(c) = y$.

□

Remarque. • Le procédé de recherche d'un antécédent utilisé dans la preuve est appelé une **dichotomie**.

- Le théorème des valeurs intermédiaires peut se formuler de la manière suivante : **l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle**.

Corollaire (Situation la plus courante)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Si $f(a)f(b) < 0$ (c'est-à-dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires), alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exemple

- Montrons que la fonction $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{4} - x$ s'annule sur l'intervalle $[0, 1]$.
On a $f(0) = \frac{2}{4} - 0 = \frac{1}{2} > 0$, et $f(1) = \frac{e + e^{-1}}{4} - 1 < \frac{3 + 1}{4} - 1 = 0$.
Donc selon le théorème des valeurs intermédiaires, il existe bien un réel $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$.
- Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
Soit λx^{2n+1} le terme de plus haut degré de la fonction polynomiale f . On sait que f est équivalente à λx^{2n+1} en $+\infty$ et en $-\infty$.
Si $\lambda > 0$, on sait que $\lambda x^{2n+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\lambda x^{2n+1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$. Ces limites sont inversées si $\lambda < 0$.
Dans les deux cas, on peut en déduire qu'il existe $a, A \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < 0$ et $f(A) > 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à l'intervalle $[a, A]$ (ou $[A, a]$), on obtient bien un réel c tel que $f(c) = 0$.

Exercice 3. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet nécessairement un point fixe, c'est-à-dire un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

2. Théorème des bornes atteintes

Théorème

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire **admet un minimum et un maximum**.

Remarque. Une autre formulation de ce théorème est : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

3. Théorème de la bijection continue

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et **strictement monotone** sur un **intervalle** I . Alors :

- f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
- La bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est elle aussi strictement monotone (de même sens de variation que f) et **continue** sur J .

Remarque.

- Le premier point **découle directement du TVI**. En effet, f est nécessairement surjective de I sur $f(I)$, qui est un intervalle selon le TVI. De plus, f est injective puisqu'elle est strictement monotone.
- Le second point est utile pour prouver l'existence et la continuité de fonctions réciproques, comme par exemple la racine n -ième ou l'arctangente.

Corollaire (Racine n -ième)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, donc sa bijection réciproque $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}^+$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc sa bijection réciproque $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire (Arctangente)

La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection continue, et sa bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une fonction continue et strictement croissante. De plus, elle est impaire.

Démonstration. On considère la fonction tangente sur l'intervalle $I =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On sait qu'elle est bien définie sur cet intervalle, et continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ($\cos$) ne s'annule pas sur I .

De plus, on admet qu'elle est dérivable et que $\forall x \in I, \tan'(x) = \tan^2(x) + 1 > 0$, donc qu'elle est strictement croissante sur I .

Comme $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$ (par opérations) : on a $\tan(I) = \mathbb{R}$ selon le théorème des valeurs intermédiaires.

Enfin, on peut donc bien appliquer le théorème de la bijection continue pour affirmer que la fonction $\arctan$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur I , continue et strictement croissante.

Pour tout $x \in I$, on a $\tan(-x) = -\tan(x)$, et donc $\arctan(\tan(-x)) = \arctan(-\tan(x))$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, en posant $y = \tan(x)$, donc $x = \arctan(y)$, on a : $-x = \arctan(-y)$, et donc $\arctan(-y) = -\arctan(y)$. D'où l'impairité. $\square$