

Chapitre 17 – Polynômes

I L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels

1. Définitions

Définition

Rappel : on appelle fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ tout fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

où $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sont appelés les coefficients de f .

On lui associe alors le polynôme P donné par $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, où X est un objet appelé **l'indéterminée**.

Proposition

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ sont égales si et seulement si elles ont exactement les mêmes coefficients.

Démonstration. Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^n b_kx^k$, avec $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Si on a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$, alors f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ puisqu'elles ont la même expression.

Supposons maintenant que $f = g$ sur $\mathbb{R}$, et montrons que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$.

On procède par l'absurde, en supposant que ce n'est pas le cas. On pose alors i le plus petit entier de $\llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $a_i \neq b_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} f = g &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n a_kx^k = \sum_{k=0}^n b_kx^k \iff \forall x \in \mathbb{R}, a_ix^i + \sum_{k=i+1}^n a_kx^k = b_ix^i + \sum_{k=i+1}^n b_kx^k \\ &\implies \forall x \in \mathbb{R}^*, a_i + \sum_{k=i+1}^n a_kx^{k-i} = b_i + \sum_{k=i+1}^n b_kx^{k-i} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^*, a_i + \sum_{j=1}^{n-i} a_{i+j}x^j = b_i + \sum_{j=1}^{n-i} b_{i+j}x^j \end{aligned}$$

Or pour tout $j \geq 1$, $x^j \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

D'où : $a_i + \sum_{j=1}^{n-i} a_{i+j}x^j \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_i$. Mais on a aussi $a_i + \sum_{j=1}^{n-i} a_{i+j}x^j = b_i + \sum_{j=1}^{n-i} b_{i+j}x^j \xrightarrow{x \rightarrow 0} b_i$.

Donc $a_i = b_i$ par unicité de la limite. C'est absurde, d'où le résultat. $\square$

Définition

- On dit que deux polynômes $P = \sum a_kX^k$ et $Q = \sum b_kX^k$ sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont identiques : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$.
- On appelle **polynôme nul** le polynôme associé à la fonction constante égale à 0, ie le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. On le note 0.
- On appelle **polynôme constant** tout polynôme associé à une fonction constante, ie tout polynôme tel que $\forall k \geq 1, a_k = 0$.
- On appelle **monôme** tout polynôme qui a exactement un coefficient non nul, c'est-à-dire $P = a_kX^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}^*$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$.

Exemple

Le polynôme défini par $P(X) = 4X^5 + 2X^4 - 7X + 1$ est associé à la fonction polynomiale $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 4x^5 + 2x^4 - 7x + 1$.

P est non nul et non constant. Il est la somme de 4 monômes : $4X^5$, $2X^4$, $-7X$ et $1 = 1X^0$.

Remarque. Nous ferons peu de différence entre polynômes et fonctions polynomiales. Et pourtant, il faut bien se rendre compte qu'il ne s'agit pas de la même chose !

Les polynômes sont des objets plus abstraits, plus *formels*, qu'on peut **appliquer** aux réels, mais aussi à d'autres objets, comme par exemple des matrices (carrées).

Ainsi, écrire $P(x) = 0$ revient à déterminer les réels $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la fonction polynomiale P s'annule. Alors qu'écrire $P(X) = 0$ revient à affirmer que le polynôme P égal au polynôme nul (et donc qu'il s'annule en tous les réels).

Définition (Degré)

- Soit $P = \sum a_k X^k$ un polynôme non nul.

On appelle **degré de P** , noté $\deg(P)$, le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$. On a donc :

$$\deg(P) = \max(\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\})$$

Si $\deg(P) = n$, on appelle **coefficient dominant de P** le coefficient a_n .

On dit que P est **unitaire** lorsque son coefficient dominant vaut 1.

- Par convention, le degré du polynôme nul est $\deg(0) = -\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n .

Exemple

- Avec $P(X) = 4X^5 + 2X^4 - 7X + 1$, on a $\deg(P) = 5$, et le coefficient dominant de P vaut 4. P n'est donc pas unitaire.
- Les polynômes de degré 0 sont les constantes non nulles.
- Les polynômes de degré 1 sont les polynômes correspondant aux fonctions affines non constantes.
- Voilà des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_3[x]$: $X^3 - 5X^2 + \sqrt{2}$, $X^2 + \frac{1}{2}X + 1$, $X^3 - X^2 + X - 1$, 1
- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$. On a aussi : $\mathbb{R}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$.

2. Opérations sur les polynômes

Proposition

Les opérations suivantes sur les fonctions usuelles s'appliquent en particulier aux polynômes, avec les mêmes propriétés de calcul, et fournit **un résultat qui reste un polynôme** :
addition, produit par un scalaire, multiplication, composition.

Remarque. • Faire la somme de deux polynômes revient à additionner deux à deux leurs coefficients.

Multiplier un polynôme par un scalaire revient à multiplier chacun de ses coefficients par ce scalaire.

- Par contre, la multiplication et la composition se comportent moins agréablement en terme de calcul des nouveaux coefficients ! Il s'agit d'utiliser la distributivité (et les identités remarquables le cas échéant), qui sont bien sûr encore valables sur l'espace des polynômes.
- On ne peut pas a priori diviser un polynôme par un autre polynôme, même s'il ne s'annule pas, car la fonction obtenue n'a aucune raison de rester polynomiale !

Exemple

Avec $P = 2X^2 + 3X - 1$ et $Q = X - 1$, on a :

- a) $P + Q = 2X^2 + 4X - 2$
- b) $5P - 2Q = 10X^2 + 13X - 3$
- c) $P \times Q = 2X^3 + X^2 - 4X + 1$
- d) $P \circ Q = P(Q) = 2X^2 - X - 2$
- e) $Q \circ P = Q(P) = 2X^2 + 3X - 2$

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \neq 0$, et $-\infty$ si $\lambda = 0$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$, et le coefficient dominant est le produit des coefficients dominants.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ si $Q \neq 0$ (et $-\infty$ ou 0 sinon).

Démonstration. Tout est évident si P ou Q est nul.

Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{l=0}^m b_l X^l$, avec $n, m \in \mathbb{N}$ et $a_n, b_m \neq 0$. On a alors :

- Si $m = n$, on a bien $P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$ donc $\deg(P + Q) \leq n$.
Si par exemple $m < n$, en posant $b_k = 0$ pour $k \in \llbracket m+1, n \rrbracket$, on a de même $\deg(P + Q) \leq n$, et le coefficient en X^n vaut $a_n \neq 0$, donc $\deg(P + Q) = n$.
- $P \times Q = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_k b_l X^{k+l} = \sum_{i=0}^{n+m} c_i X^i$ où $c_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l$.
Le coefficient en X^{n+m} vaut $a_n b_m \neq 0$, d'où le degré et le coefficient dominant.
- $P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$, où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(Q^k) = k \deg(Q)$. Comme les $(km)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux à deux distincts, on a bien :
 $\deg(P \circ Q) = \max(\{k \times \deg(Q) \mid 1 \leq k \leq n \text{ et } a_k \neq 0\}) = \deg(P) \deg(Q)$.

□

Remarque. On n'a pas toujours $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$. Par exemple, avec $P = X^2 + 5X - 2$ et $Q = -X^2 + 4$, on a $\deg(P + Q) = 1$ car les degrés sont égaux et les coefficients dominants se compensent. C'est le seul cas où on n'a pas égalité, mais il faut y faire attention !

Corollaire

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Définition

On dit qu'un polynôme est pair lorsque $P(-X) = P$, et impair lorsque $P(-X) = -P$.

Proposition

Un polynôme est pair si et seulement si tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.

Un polynôme est impair si et seulement si tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

3. Polynôme dérivé

Définition

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On appelle **polynôme dérivé de P** le polynôme $P' \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Remarque. • Autrement dit, P' est le polynôme associé à la dérivée de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$.

- Les règles de calculs sur les polynômes dérivés sont les mêmes que celles sur les fonctions :

$$(P + Q)' = P' + Q'$$

$$(\lambda P)' = \lambda P'$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

$$(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$$

Exemple

- Avec $P = 3X^4 - 2X^3 - 7$, on a $P' = 12X^3 - 6X^2$.
- Avec $P = (X + 1)^4$, on a $P' = 4(X + 1)^3$.

On peut retrouver ce résultat en développant P par la formule du binôme :

$$P = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 \text{ donc } P' = 4X^3 + 12X^2 + 12X + 4.$$

Proposition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors : $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0 \end{cases}$

Et dans le cas où $\deg(P) = n \geq 1$: le coefficient dominant de P' est na_n .

Démonstration. Si $\deg(P) \leq 1$, alors (P est une constante) on obtient $P' = 0$, donc $\deg(P') = -\infty$.
Sinon, soit $n = \deg(P) \geq 1$. Alors les monômes de P' sont de degré au plus $n - 1$, et le coefficient de X^{n-1} est $na_n \neq 0$ puisque $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$.

Ainsi, on a bien $\deg(P') = n - 1 = \deg(P) - 1$, et le coefficient dominant est le bon. $\square$

Définition

Soit P un polynôme. On définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ la dérivée k -ième (ou d'ordre k) de P , notée $P^{(k)}$, par : $P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$.

II Racines et factorisations

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Racines et diviseurs

Définition

On dit que α est **une racine de P** lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème

α est racine de $P \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha)Q$.

Démonstration. Si on peut écrire $P = (X - \alpha)Q$, alors $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0$: α est bien une racine de P .

Supposons maintenant que α est racine de P . On veut montrer qu'on peut trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

On commence par le montrer dans le cas où $\alpha = 0$. Si $\alpha = 0$, on a $P(0) = 0$, donc $a_0 = 0$ (coefficient constant nul). Ainsi, on peut bien factoriser P par X , et écrire : $P = X \times Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Dans le cas général, on pose $\tilde{P} = P(X + \alpha) \in \mathbb{R}[X]$.

On a alors : $P = \tilde{P}(X - \alpha)$ puisque $P((X - \alpha) + \alpha) = P(X) = P$.

De plus, $\tilde{P}(0) = P(0 + \alpha) = P(\alpha) = 0$, donc 0 est racine de $\tilde{P}$. On peut donc écrire $\tilde{P} = X \times \tilde{Q}$, avec $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$.

On a alors $P = \tilde{P}(X - \alpha) = (X - \alpha) \times \tilde{Q}(X - \alpha)$.

C'est bien le résultat voulu, avec $Q = \tilde{Q}(X - \alpha) \in \mathbb{R}[X]$. □

Exemple

Avec $P = 2X^3 - X^2 + 3$, on voit que $P(-1) = 0$ donc -1 est racine de P .

On peut alors trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X + 1)Q$.

On a $\deg(P) = \deg(X + 1) + \deg(Q)$, donc $\deg(Q) = 2$.

On cherche donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$.

On doit avoir $P = aX^3 + (a + b)X^2 + (b + c)X + c$, donc par égalité de deux polynômes, les coefficients doivent être deux à deux égaux. C'est toujours ce qui se cache derrière une **identification** !

On obtient $a = 2$, $c = 3$, puis $b = -3$, et donc : $P = (X + 1)(2X^2 - 3X + 3)$.

NB : On peut aussi utiliser la méthode de la preuve, en posant :

$\tilde{P} = P(X - 1) = 2(X - 1)^3 - (X - 1)^2 + 3 = 2X^3 - 7X^2 + 8X = X(2X^2 - 7X + 8)$.

On a alors $P = \tilde{P}(X + 1) = (X + 1)(2(X + 1)^2 - 7(X + 1) + 8) = (X + 1)(2X^2 - 3X + 3)$.

Corollaire (*Factorisation par plusieurs racines distinctes*)

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ sont racines de } P \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p)Q$$

Démonstration. On factorise d'abord par $(X - \alpha_1)$ en écrivant $P = (X - \alpha_1)Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$.

Puis $P(\alpha_2) = 0$, donc $(\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2) = 0$. Mais $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$, donc nécessairement α_2 est racine de Q_1 .

On peut donc écrire $Q_1 = (X - \alpha_2)Q_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$, et donc $P = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)Q_2$.

On recommence avec α_3 , qui est racine de P , et donc de Q_2 puisque $(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \neq 0$.

Et ainsi de suite. Formellement, on devrait procéder par récurrence. □

Corollaire (*Degré et nombre de racines distinctes*)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si P est non nul et admet n racines distinctes, alors $\deg(P) \geq n$.
- Si $\deg(P) = n$, alors P admet **au plus** n racines distinctes.
- Si $\deg(P) = n$ et P admet n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors : $P = a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$, où a_n est le coefficient dominant de P .

Corollaire (*Polynôme nul et racines*)

- Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et P admet $n + 1$ racines distinctes, alors $P = 0$.
- Tout polynôme qui s'annule une infinité de fois est le polynôme nul (c'est par exemple le cas si P est nul sur un intervalle).

Une ou deux applications ?

Rappel. Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle... par TVI !

2. Multiplicité d'une racine

On connaît déjà la notion de **racine double** pour un polynôme de degré 2, lorsque le discriminant est nul. On sait qu'on peut alors écrire $P = a_2(X - r_0)^2$.

Exemple

Prenons $P = X^3 - 3X + 2$.

On remarque que 1 est racine de P , et on factorise par $(X - 1)$: $P = (X - 1)Q$ avec $Q = X^2 + X - 2$.

Mais on a encore $Q(1) = 0$, donc on peut factoriser de nouveau Q par $(X - 1)$!

$Q = X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$, donc on a $P = (X - 1)(X - 1)(X + 2) = (X - 1)^2(X + 2)$.

De nouveau, on va dire que la racine 1 « compte double » puisque P se factorise par $(X - 1)^2$.

1 sera donc une *racine double* de P , et -2 une *racine simple*.

Définition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

On dit que α est une **racine de P d'ordre m** lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = (X - \alpha)^m Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

m est appelé l'**ordre de multiplicité** de α (comme racine de P).

Définition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P . On dit que α est :

- **racine simple** de P lorsque son ordre de multiplicité est 1.
- **racine double** de P lorsque son ordre de multiplicité est exactement 2.
- **racine multiple** de P lorsque son ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 2.

Exemple

Donner les racines avec ordre de multiplicité du polynôme suivant : $P = (X^3 - 1)^2(X^2 - 4X + 4)^3$.

Théorème (Caractérisation des racines multiples)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α est racine simple de $P \iff P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0$.
- α est racine multiple de $P \iff P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0$.

Démonstration. On suppose que α est racine de P , donc qu'on peut écrire $P = (X - \alpha)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il s'agit alors de montrer que $Q(\alpha) = 0 \iff P'(\alpha) = 0$.

Or on a $P' = 1 \times Q + (X - \alpha)Q' = Q + (X - \alpha)Q'$, donc $P'(\alpha) = Q(\alpha) + 0$.

D'où : $Q(\alpha) = 0 \iff P'(\alpha) = 0$, et donc α est racine multiple si et seulement si $P'(\alpha) = 0$. $\square$

Théorème (Généralisation)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ d'ordre } m \iff \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que 1 est racine simple de $P = X^{n+1} - X^{n-1} - X + 1$.
2. Montrer que 1 est racine double de $P = X^{n+1} - X^n - X + 1$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Si P est non nul et admet n racines **comptées avec multiplicité**, alors $\deg(P) \geq n$.
- Si $\deg(P) = n$, alors P admet **au plus** n racines **comptées avec multiplicité**.
- Si $\deg(P) = n$ et P admet n racines **comptées avec multiplicité**, alors on peut écrire $P = a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$, où a_n est le coefficient dominant de P , et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
On dit alors que P est **scindé** sur $\mathbb{R}$.

3. Généralisation aux complexes

Les résultats ci-dessus sont encore tous vrais pour des polynômes à coefficients complexes, et des racines dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

On a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, donc on peut parler de racine complexe pour un polynôme à coefficients réels. On a alors :

Proposition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$. Alors : z est racine de P si et seulement si $\bar{z}$ est racine de P .

Démonstration. $P(z) = 0 \iff \overline{P(z)} = \bar{0} \iff \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = 0 \iff \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = 0 \iff \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \bar{z}^k = 0 \iff P(\bar{z}) = 0$
puisque $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R}$ donc $\overline{a_k} = a_k$. $\square$

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont **scindés dans** $\mathbb{C}$.

Corollaire

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.