Chapitre 18 – Dérivation des fonctions réelles

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle, x_0 un point de I, et f une fonction réelle définie sur I.

I Définitions

1. Dérivabilité en un point

Définition

- On dit que f est **dérivable en** x_0 lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Le réel $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est alors appelé le **nombre dérivé** de f en x_0, et est noté $f'(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.
- On dit que f est **dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout point de l'intervalle I.
  On appelle alors fonction dérivée de f la fonction : $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x_0 & \mapsto & f'(x_0) \end{array} \right.$
- On note $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{D}(I)$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Exemple

Montrons que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $x \neq x_0$, on a : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \dfrac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0$.
Or $x+x_0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 2x_0 \in \mathbb{R}$, donc f est bien dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0) = 2x_0$.

Exercice 1. *Étudier la dérivabilité sur leur ensemble de définition de :*

a) $f(x) = c \in \mathbb{R}$ *b)* $g(x) = \sqrt{x}$ *c)* $h(x) = \cos(x)$

Remarque. En écrivant $x = x_0+h$, l'étude de la dérivabilité revient à calculer la limite : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Théorème (*Dérivable* $\Longrightarrow$ *continue*)

Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Démonstration. Notons τ la fonction taux d'accroissement : $\forall x \in I\backslash\{x_0\}$, $\tau(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, prolongée par $\tau(x_0) = f'(x_0)$.
Ainsi, τ est continue en x_0.
De plus, on a pour tout $x \in I$: $f(x) = (x-x_0)\tau(x) + f(x_0)$.
Ainsi, f est continue en x_0 comme somme de fonctions continues en x_0. □

Remarque.
- La réciproque est fausse ! Par exemple, la fonction racine carrée est continue en 0 mais pas dérivable en ce point.
- On a donc : $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{C}(I)$.

2. Dérivabilité à gauche / à droite

Définition

On dit que f est :

- **dérivable à droite en** x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note parfois $f'_d(x_0)$ cette limite.
- **dérivable à gauche en** x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note parfois $f'_g(x_0)$ cette limite.

Proposition

Si f n'est pas une extrémité de l'intervalle I, on a :
f est dérivable en x_0 $\iff$ f est dérivable à gauche et à droite en x_0, **et** $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
Et dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple

La fonction valeur absolue est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 1$, puisque $\forall x > 0$, $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{x}{x} = 1$.
Elle est également dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = -1$, puisque $\forall x < 0$, $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{-x}{x} = -1$.
$1 \neq -1$, donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 !

3. Interprétation graphique, tangente

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans ce repère, et M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. On a donc $M_0 \in \mathcal{C}_f$.

Définition

- Si f est dérivable en x_0, alors on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **tangente** au point M_0, qui est la droite d'équation :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
Il s'agit de la droite de coefficient directeur $f'(x_0)$, qui croise la courbe au point d'abscisse x_0.
- Si f est continue en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **tangente verticale** au point M_0, qui est la droite d'équation $x = x_0$.

Remarque.

- La tangente est la limite des sécantes (M_0M) où $M(x, f(x))$ quand x tend vers x_0. En effet, chacune de ces droites passe par le point M_0, et leur coefficient directeur tend vers le coefficient directeur de la tangente.
- La tangente en x_0 est horizontale si et seulement si $f'(x_0) = 0$.

II Opérations sur les dérivées

1. Opérations arithmétiques

Proposition

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lambda u + v$ est dérivable en x_0, et $(\lambda u + v)'(x_0) = \lambda u'(x_0) + v'(x_0)$.
- $u \times v$ est dérivable en x_0, et $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.
- Si de plus $v(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables en x_0, et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

Démonstration. Comme u et v sont dérivables en x_0, elles sont aussi continues en x_0.
De plus, si $v(x_0) \neq 0$, alors au voisinage de x_0, on a $v(x) \neq x_0$, donc $\dfrac{1}{v}$.
Pour prouver chacune des trois premières affirmations, on revient à la définition en calculant la limite.
Pour la dernière, on écrit que $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ et on applique les opérations précédentes. □

Corollaire

Si $u, v \in \mathcal{D}(I)$, alors on a encore $\lambda u + v, u \times v \in \mathcal{D}(I)$, avec les dérivées données précédemment.
Et si de plus v ne s'annule pas, alors on a $\dfrac{1}{v}, \dfrac{u}{v} \in \mathcal{D}(I)$, avec les dérivées données précédemment.

2. Composition

Proposition

On suppose que $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors : $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$$

Démonstration. Pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, on a : $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si $f(x) \neq f(x_0)$.
Et si $f(x) = f(x_0)$, on peut écrire : $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \times \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.
Quoi qu'il en soit, le premier facteur converge vers $g'(f(x_0))$ lorsque x tend vers x_0, par composition de limites.
De plus, le second facteur converge vers $f'(x_0)$ quand x tend vers x_0.
Par produit, on a bien : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

Corollaire

Si $f \in \mathcal{D}(I)$, $g \in \mathcal{D}(J)$, et $f(I) \subset J$, avec I et J deux intervalles, alors :
$g \circ f \in \mathcal{D}(I)$, et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Exercice 2. *Donner l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée de* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}}$.

3. Réciproque

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.
On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$, et on note $y_0 = f(x_0) \in J$. Alors :
f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$.

- Si c'est le cas, alors $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$
- Si ce n'est pas le cas, alors la courbe représentative de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse y_0.

Démonstration. On a, pour tout $y \in J \backslash \{y_0\}$:
$\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \dfrac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}$.
Le dénominateur de cette fraction converge vers $f'(f^{-1}(y_0))$ quand y tend vers y_0, par continuité de f^{-1} et dérivabilité de f en $f^{-1}(y_0)$.
D'où la convergence si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$, et la valeur du nombre dérivé. □

Corollaire

Si $f \in \mathcal{D}(I)$ est strictement monotone et dérivable, et si de plus sa dérivée ne s'annule pas, alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$, de dérivée : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Exemple

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De plus, sa dérivée ne s'annule pas.
On en déduit que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

4. Fonctions usuelles

Vous devez absolument connaître sur le bout des doigts les dérivées des fonctions usuelles rappelées en début d'année, et savoir calculer la dérivée de n'importe quelle fonction obtenue à partir de celles-ci par des opérations arithmétiques ou par composition.

III Les théorèmes fondamentaux

1. Extremum

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I, et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de l'intervalle.
Si f admet un **extremum local** en x_0, alors : $\quad f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x \in I$ et $f(x) \leq f(x_0)$.
Alors on a pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ puisque $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 < 0$.
Ainsi, par passage à la limite dans les inégalités larges : $f'_g(x_0) \geq 0$.
Mais pour tout $x \in]x_0, x_0 + \delta]$, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ puisque $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 > 0$.
D'où : $f'_d(x_0) \leq 0$.
Comme $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$, on a donc nécessairement $f'(x_0) = 0$. $\square$

Remarque. ⚠ Le résultat est faux en général si x_0 est une extrémité de l'intervalle ! Par exemple, avec $f(x)$ sur $I = [0, 1]$, f admet un minimum en 0, mais $f'(0) = 1 \neq 0$.
⚠ La réciproque de ce résultat est faux ! On peut avoir $f'(x_0) = 0$ sans qu'il y ait d'extremum local. Par exemple pour la fonction $f : x \mapsto x^3$, avec $x_0 = 0$.

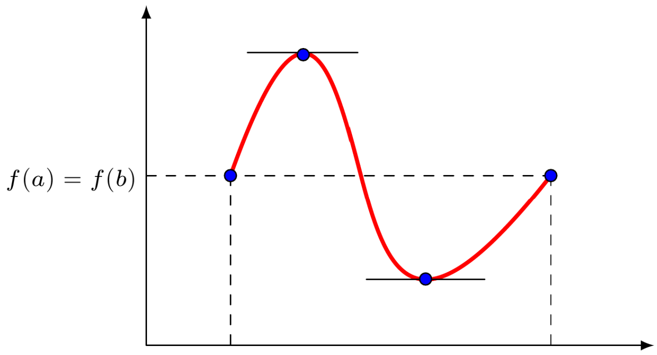
2. Théorème de Rolle

Théorème (*de Rolle*)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



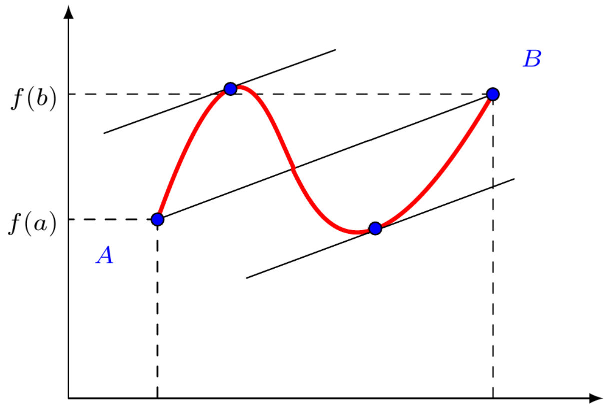
Démonstration. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, on sait qu'elle est bornée et atteint ses bornes.
Si l'une de ses bornes est atteinte dans l'intervalle $]a, b[$ en un point c, alors f admet un extremum global donc local en c, et donc $f'(c) = 0$ d'après la proposition précédente.
Sinon, c'est que f atteint son minimum et son maximum aux extrémités de l'intervalle. Mais comme $f(a) = f(b)$, on a nécessairement : $min(f) = max(f) = f(a) = f(b)$.
Ainsi, f est constante sur $[a, b]$. On en déduit que pour tout $c \in]a, b[$: $f'(c) = 0$. $\square$

Exemple

1. Avec $f(x) = \cos(x)$, on sait que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f(0) = f(2\pi)$, donc il existe un réel $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f'(c) = 0$.
   En effet, $c = \pi$ convient puisque $= -\sin(\pi) = 0$.
2. Plus généralement, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et T-périodique $T > 0$, alors f' s'annule au moins une fois sur chaque intervalle ouvert de longueur T c'est-à-dire sur chaque $]a, a + T[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. La fonction $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x$ s'annule en 0 et 1, et est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   Ainsi, on sait que sa dérivée $f' : x \mapsto 4x^3 + 4x - 3$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

Exercice 3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$, et qui s'annule n fois sur $[a,b]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors f' s'annule au moins $(n-1)$ fois sur $]a,b[$.*

3. Théorème des accroissements finis



Théorème (*des accroissements finis*)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ie $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration. Soit $t = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $x \in [a,b]$: $g(x) = f(x) - tx$.
Alors g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ par somme, et on a :
$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - t(b-a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$.
$g(a) = g(b)$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction g, et obtenir un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or, pour tout $x \in]a,b[$, on a $g'(x) = f'(x) - t$, donc $g'(c) = f'(c) - t = 0$.
Ainsi, $f'(c) = t = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Remarque.

- **Interprétation graphique :** il existe un point pour lequel la tangente est parallèle à la droite (AB).
- Comme on ne connaît pas c précisément, simplement que $c \in]a,b[$, on utilise souvent ce résultat sous forme d'inégalité. Par exemple :

Exemple

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \dfrac{1}{t}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $[t, t+1]$. Alors f est continue et dérivable sur $[t, t+1]$, donc selon le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]t, t+1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(t+1) - f(t)}{t+1-t} = \ln(t+1) - \ln(t)$.
Mais $f'(c) = \dfrac{1}{c}$ et $t < c < t+1$, donc $\dfrac{1}{t+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{t}$.
On en déduit le résultat voulu.

Exercice 4. *Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$.*

4. Dérivée et sens de variations

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- f est constante sur $[a, b] \iff \forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$
- f est croissante sur $[a, b] \iff \forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur $[a, b] \iff \forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$

Démonstration.

- On a déjà vu que si f est constante, alors elle est dérivable de dérivée nulle.
  Réciproquement, supposons que $f' = 0$ sur $]a, b[$, et montrons qu'alors f est constante.
  Soient $x, y \in [a, b]$, avec par exemple $x < y$. D'après le TAF, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Or $f'(c) = 0$, donc $f(y) - f(x) = 0$.
  On a bien montré que $f(y) = f(x)$ pour tous les $x, y \in [a, b]$.
- Si f est croissante, alors pour tout $x_0 \in]a, b[$ et pour tout $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
  Par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient bien que $f'(x_0) \geq 0$, et ce pour tout $x_0 \in]a, b[$.
  Réciproquement, supposons que f' est positive sur $]a, b[$ et montrons qu'alors f est croissante sur $[a, b]$.
  Soient $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$. On veut montrer que $f(x) \leq f(x)$.
  Or, d'après le TAF, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.
  Comme $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$, on en déduit que $f(y) - f(x) \geq 0$. D'où la croissance de f.
- Même raisonnement.

□

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si f' est positive sur $]a, b[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
- Si f' est négative sur $]a, b[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

Démonstration. On prouve le premier point. Comme $f' \geq 0$ sur $]a, b[$, on sait que f est croissante sur $[a, b]$.
Si par l'absurde elle n'est pas strictement croissante, alors il existe $c, d \in [a, b]$, avec $c < d$, tels que $f(c) = f(d)$.
Mais alors par croissance, f est constante sur $[c, d]$. Ainsi : $f' = 0$ sur $[c, d]$! f' s'annule sur un intervalle donc en une infinité de points, ce qui contredit l'hypothèse.
C'est absurde, d'où le résultat. □

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de l'intervalle.
Si f' s'annule **et change de signe** en x_0, alors f admet un extrémum en x_0.

IV Dérivées d'ordre supérieur

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **deux fois dérivable** sur I si f est dérivable sur I et f' est encore dérivable sur I.
La dérivée de f' s'appelle alors la **dérivée seconde** de f et se note f'' ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Plus généralement, on peux définir par récurrence la notion de fonction n fois dérivable sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note alors $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ la **dérivée n-ième** de f, donnée par :

$$f^{(0)} = f \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

On dit que f est de classe $\mathcal{D}_n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I. On note alors $f \in \mathcal{D}^n(I)$.

Exemple

- Si P est polynomiale de degré n, alors P est $n+1$ fois dérivable et $P^{(n+1)} = 0$.
  P est donc dérivable à tout ordre, et pour tout $k \geq n+1$: $P^k = 0$.
- La fonction cosinus est également dérivable à tout ordre, avec comme dérivées successives : cos, $-\sin$, $-\cos$, sin, cos, $-\sin$, etc.
- L'exponentielle est dérivable à tout ordre, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\exp^{(n)} = \exp$.

Exercice 5. *Soit $f : x \mapsto x^2 \exp(x)$.*
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable et $f^{(n)}(x) = e^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)$.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I.
  On note $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
- Lorsque $f^{(n)}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire qu'elle est dérivable à tout ordre. On note $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque.

- $\ldots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$
- $\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$
- Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors les dérivées successives de f jusqu'au rang n existent toutes et sont **toutes** continues, puisqu'elles sont dérivables, et que la dernière est continue !

Exemple

1. Les fonctions polynomiales sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Il en va de même pour les fonctions cos, sin, exp.
3. $\ln \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+^*\right)$
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

   - **Continuité :** On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq x^2$, et $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. f est bien continue en 0.
     f est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   - **Dérivabilité :** f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.
     De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour la même raison que précédemment (encadrement).
     Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
   - **Classe $\mathcal{C}^1$** f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.
     Cependant, lorsque x tend vers 0, on a $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ mais $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite.
     Ainsi, $f'(x)$ n'a pas de limite en 0.
   - **En conclusion :** $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}) \backslash \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mais n'est pas $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$.*

Proposition

Pourvu que ces opérations aient un sens, n'importe quelle combinaison linéaire, produit, quotient ou composition de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est encore de classe $\mathcal{C}^n$.