

Chapitre 19 – Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Définitions et exemples importants

1. Définitions

Définition

Un **espace vectoriel sur \mathbb{K}** , ou **\mathbb{K} -espace vectoriel**, est un ensemble E muni de deux opérations :

- Une *loi interne* notée « $+$ » : $E \times E \rightarrow E$, appelée **addition** ;
- Une *loi externe* notée « \cdot » : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, appelée **multiplication par un scalaire** ;

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall u, v, w \in E, \quad u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativité)
2. Il existe un élément de E noté 0_E ou 0 , appelé le **neutre pour l'addition**, tel que :
 $\forall u \in E, \quad u + 0_E = 0_E + u = u$
3. $\forall u \in E, \exists v \in E, \quad u + v = v + u = 0_E$. v est appelé **l'opposé** de u .
4. $\forall u, v \in E, \quad u + v = v + u$ (commutativité).
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\forall u \in E, \quad 1 \cdot u = u$

Vocabulaire

- Les éléments de E sont appelés les **vecteurs**.
On les note généralement u, v, w, \dots , sans les flèches.
- Les éléments de \mathbb{K} sont appelés les **scalaires**.
- L'élément 0_E de E est appelé le **vecteur nul**.

Remarque. • Un espace vectoriel n'est jamais vide, puisqu'il contient le vecteur nul 0_E .

- La multiplication par un scalaire se note souvent λu au lieu de $\lambda \cdot u$
- L'espace vectoriel est parfois noté $(E, +, \cdot)$ pour rappeler l'existence des deux lois qui lui confèrent sa structure.
- L'opposé d'un vecteur est toujours égal à son produit par le scalaire -1 .
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in E$, on a : $\lambda u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

Définition

Soit E un espace vectoriel et $u_1, \dots, u_p \in E$ des vecteurs.

On dit que $u \in E$ est **combinaison linéaire** de u_1, \dots, u_p s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

Remarque. • 0_E est toujours combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p , puisque $0_E = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_p$.

- On pourra encore dire que deux vecteurs $u, v \in E$ sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$, dans le cas d'un espace vectoriel quelconque E .

2. L'espace vectoriel \mathbb{K}^n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème

L'ensemble $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$ des n -uplets d'éléments de \mathbb{K} peut être muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, par :

- $\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u + v = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{K}^n$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda u = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{K}^n$

Muni de ces deux opérations, \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Son vecteur nul est $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier un à un chacune des 7 propriétés de la définition pour les lois définies ci-dessus.

En pratique, nous ne ferons pas ces vérifications, et nous partirons d'espaces dont on admet qu'ils ont une **structure vectorielle**. \square

Exemple

- L'ensemble des vecteurs du plan, assimilé à \mathbb{R}^2 , est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- L'ensemble des vecteurs de l'espace est également un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- \mathbb{R} lui-même est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et \mathbb{C} est un \mathbb{C} -espace vectoriel.
- \mathbb{R}^+ n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel, puisque les éléments de \mathbb{R}^+ n'ont pas d'opposé dans \mathbb{R}^+ .
- \mathbb{R} n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel, puisqu'on ne dispose pas d'une multiplication $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple

$u = (1, -1, 1)$ et $v = (-1, 3, 1)$ sont deux vecteurs de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

- Les vecteurs suivants sont-ils combinaison linéaire de u et v ?

a) $a = (1, 2, 3)$

b) $b = (1, 0, 2)$

c) $c = (0, 1, 1)$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $a = \lambda u + \mu v \iff \begin{cases} 2 &= \lambda & - \mu \\ -1 &= -\lambda & + 3\mu \\ 3 &= \lambda & + \mu \end{cases}$

On résout ce système linéaire d'inconnues λ, μ , et on obtient une incompatibilité. Ainsi, a n'est pas combinaison linéaire de u et v .

On procède de même sur b et c :

– b est bien CL de u et v , avec $\lambda = 3/2$ et $\mu = 1/2$.

– c est aussi CL de u et v , avec $\lambda = \mu = 1/2$.

- À quelle condition sur $x, y, z \in \mathbb{R}$ le vecteur $w = (x, y, z)$ est-il combinaison linéaire de u et v ?
En résolvant le système linéaire d'inconnues λ, μ et de paramètres x, y, z , on obtient la condition de compatibilité : $0 = z - y - 2x$.
Ainsi, w est CL de u et v si et seulement si le système admet une solution, donc si et seulement si $2x + y - z = 0$.
On obtient une sorte d'équation cartésienne de plan, qui passe par $0, 0, 0$ et qui est dirigée par u et v : c'est tout à fait logique.

3. Autres espaces vectoriels

Dans l'ordre quelconque trouvé par les élèves, les ensembles suivants, muni des opérations déjà définis dessus, sont en fait des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} .
- L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles ou complexes.
- L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions de I dans \mathbb{K} , où \mathbb{K} est un intervalle.
- \mathbb{C} est en fait un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exemple

- $P = X^3 - 2X^2 + 7$ n'est pas combinaison linéaire de $U = X + 1$, $V = X^2 - 5$ et $W = 2X^2 - 3X + 1$, puisque son degré est trop grand.
- Tout polynôme de degré n est combinaison linéaire des monômes $1, X, X^2, \dots, X^n$.
- Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f = \exp$ n'est pas combinaison linéaire des fonctions $u = \cos$ et $v = \sin$. En effet, si $f = \lambda u + \mu v$, alors f est bornée, puisque u et v sont bornées. C'est impossible.
- Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a vu que les suites qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, u^{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ sont exactement les combinaisons linéaires des suites $x_n = 1^n = 1$ et $y_n = 2^n$.

II Sous-espaces vectoriels

1. Définition et exemples

Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $F \subset E$ un sous-ensemble de E .

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** (sev) de E lorsque F est non vide, et que les lois $+$ et \cdot **restreintes** à F munissent F d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition (Caractérisation pratique)

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On a :

$$F \text{ est un sev de } E \iff \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F, \lambda u + v \in F \end{cases}$$

On dit que F est **stable par combinaison linéaire**.

Exemple

1. $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels (triviaux) de E .
2. $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Il en va de même de $\mathcal{D}^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I , de $\mathcal{C}^n(I)$ pour n quelconque, et de $\mathcal{C}^\infty(I)$.
En effet, tous ces ensembles contiennent la fonction nulle, et ils sont tous stables par addition et multiplication par un scalaire.
3. L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet, la matrice nulle 0_n est symétrique, et pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a : $(\lambda S_1 + S_2)^\top = \lambda S_1^\top + S_2^\top = \lambda S_1 + S_2$, donc $\lambda S_1 + S_2$ est encore symétrique.
4. $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
En effet, le polynôme nul est bien de degré $\leq n$, et une combinaison linéaire de polynômes a un degré inférieur ou égal au degré maximal des polynômes, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est bien stable par combinaison linéaire.
5. Les seuls sev de \mathbb{R} sont $\{0\}$ et \mathbb{R} .
En effet, si F est un sev de \mathbb{R} non réduit à $\{0\}$, alors F contient un élément $x \in \mathbb{R}^*$.
Mais alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y = \frac{y}{x} \cdot x \in F$, puisque F est stable par multiplication par n'importe quel scalaire. On a donc $F = \mathbb{R}$.
6. Montrons que l'ensemble suivant est un sev de \mathbb{R}^2 : $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$.
 - On a bien $F \subset \mathbb{R}^2$.
 - $(0, 0) \in F$ puisque $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$.
 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (x, y) \in F$ et $v = (x', y') \in F$.
Alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in \mathbb{R}^2$, et on a :
 $2(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y') = \lambda(2x - 3y) + (2x' - 3y') = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.
D'où : $\lambda u + v \in F$. F est donc bien un sev de \mathbb{R}^2 , donc il est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.
7. Par contre, l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
Tout simplement, il ne contient pas $(0, 0)$!

Exercice 1. • Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- Montrer que l'ensemble des fonctions paires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
NB : On peut montrer que la même manière que l'ensemble des fonctions impaires est aussi un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des fonctions croissantes sur \mathbb{R} est-il un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- Décrire géométriquement l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 , puis l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

2. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors :

$$F \cap G \text{ est encore un sous-espace vectoriel de } E.$$

Démonstration. • On a $F \subset E$ et $G \subset E$, donc $F \cap G \subset E$.

- On a $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F \cap G$.

$u, v \in F$ et F est stable par combinaison linéaire, donc $\lambda u + v \in F$.
 De même, $u, v \in G$ et G est stable par combinaison linéaire, donc $\lambda u + v \in G$.
 On a donc bien : $\lambda u + v \in F \cap G$.

□

Remarque. \triangleleft Une union de deux sev n'est **pas un sev** a priori! Par exemple dans \mathbb{R}^2 , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont des sev, mais leur union n'en est pas un, puisqu'elle n'est pas stable par somme $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin F \cup G$.

Corollaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: l'intersection de n sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Par récurrence immédiate.

□

Remarque. En fait, la preuve de la première proposition se généralise aisément pour prouver qu'une intersection *quelconque* (même infinie) de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

3. Sous-espace vectoriel engendré

Proposition (Définition)

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E .
 L'ensemble des *combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{F}* est un sous espace vectoriel de E . Il est appelé le **sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F}** et se note $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ou $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On a :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \}$$

Exemple

- $\text{Vect}(0_E) = \{0_E\}$
- Pour tout $u \in E$, on a $\text{Vect}(u) = \mathbb{K}u = \{ \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K} \}$.
 Si $u \neq 0$, on l'appelle la **droite vectorielle** engendrée par u .
- Pour tous $u, v \in E$, on a $\text{Vect}(u, v) = \{ \lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \}$.
 Si u et v ne sont pas colinéaires (proportionnels), on l'appelle le **plan vectoriel** engendré par u et v .
- $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3)$
- On se place dans $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$. On a vu que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'' = y' + 6y$ est exactement l'espace vectoriel engendré par les fonction $x \mapsto e^{-2x}$ et $x \mapsto e^{3x}$, puisque le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour racines -2 et 3 .
 L'ensemble des solutions de cette équation différentielle forme donc un plan vectoriel dans l'espace des fonctions.

Proposition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E .
 L'espace $V = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est le **plus petit** sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient tous les vecteurs u_1, \dots, u_p .
 Ainsi, si un sous-espace vectoriel de $F \subset E$ contient u_1, \dots, u_p , alors on a même $\overrightarrow{(u_1, \dots, u_p)} \subset F$.

Démonstration. V est bien un sev de E qui contient u_1, \dots, u_p .

Soit F un sev de E qui contient u_1, \dots, u_p . Montrons que $V \subset F$. On sait que u_1, \dots, u_p sont des éléments de F , et que F est stable par combinaisons linéaires, donc nécessairement, tous les éléments de V sont bien dans F .

□

Exercice 2. Soit $F = \{(a + b, a - 2b, -2a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ et $H = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, 1, 1))$.

1. Écrire F comme l'espace vectoriel engendré par deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , et en déduire que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. En procédant de la même manière, montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner une condition sur $x, y, z \in \mathbb{R}$ pour avoir $u \in H$. On obtient une équation cartésienne de H .
4. Déterminer $F \cap G$, puis $G \cap H$.

III Familles de vecteurs

Dans toute cette section, E un espace vectoriel, p un entier naturel, et u_1, \dots, u_p des vecteurs de E .

1. Familles génératrices

Définition

La famille (u_1, \dots, u_p) est dite **génératrice** de E lorsque $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$, c'est-à-dire que :

$$\forall v \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad v = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

Exemple (Des familles de \mathbb{R}^2)

1. $((0, 1), (2, 1), (-1, 5))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 . En effet, pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, et tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a : $v = a(0, 1) + b(2, 1) + c(-1, 5) \iff (x, y) = (2b - c, a + b + 5c)$.
On obtient un système linéaire échelonné compatible de trois inconnues à deux équations, avec c comme inconnue secondaire. Il existe donc toujours une solution (et même une infinité).
Ainsi, on peut bien écrire tout vecteur comme combinaison linéaire de $(0, 1)$, $(2, 1)$ et $(-1, 5)$: on a bien une famille génératrice.
2. La famille $((1, 0), (0, 1))$ est aussi génératrice de \mathbb{R}^2 , et la famille $((1, 0), (1, 1))$ également.
En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, et $(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0)$.
3. La famille $((1, 0), (1, 1), (7, -1), (1, 5))$ est aussi génératrice de \mathbb{R}^2 , puisque l'espace vectoriel engendré contient l'espace vectoriel engendré par $(1, 0)$ et $(1, 1)$, qui est déjà E tout entier.
Autrement dit, tout vecteur de \mathbb{R}^2 s'obtient comme une combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(1, 1)$, et il suffit de mettre des 0 comme coefficients des deux autres vecteurs.
4. Par contre, la famille $((1, 1), (3, 3))$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^2 , puisque toute vecteur (x, y) obtenu comme combinaison linéaire de $(1, 1)$ et $(3, 3)$ vérifie nécessairement $x = y$.
Ainsi, $\text{Vect}((1, 1), (3, 3)) \neq \mathbb{R}^2$.

Exemple

1. La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .
Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque : la famille $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est génératrice de \mathbb{R}^n .
2. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. La famille $(1, i)$ est génératrice de \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel.
 $(1, j, j^2)$ convient également. En effet, $j - j^2 = \sqrt{3}i$ donc pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a $a + ib = a1 + \frac{b}{\sqrt{3}}j - \frac{b}{\sqrt{3}}j^2$.
 $(1, j)$ est en fait déjà une famille génératrice de \mathbb{C} , puisqu'on peut écrire $i = \frac{2}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Proposition

Toute famille qui contient une famille génératrice est encore génératrice.

2. Familles libres

Définition

On dit que la famille (u_1, \dots, u_p) est **libre** lorsque :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \right)$$

On dit aussi que les vecteurs u_1, \dots, u_p sont *linéairement indépendants*.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**, et vérifie donc : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0), \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$.

Exemple

- La famille $((0, 1), (2, 1), (-1, 5))$ est une famille liée de \mathbb{R}^2 .
Pour le vérifier, on cherche $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que $a(0, 1) + b(2, 1) + c(-1, 5) = (0, 0)$.
Or $a(0, 1) + b(2, 1) + c(-1, 5) = (2b - c, a + b + 5c)$. On peut résoudre le système associé à $(2b - c, a + b + 5c) = (0, 0)$, qui est linéaire homogène et compatible, à 3 inconnues mais de rang 2. On obtient une infinité de solutions avec un degré de liberté, par exemple $(-11, 1, 2)$. On vérifie bien que $-11(0, 1) + (2, 1) + 2(-1, 5) = (0, 0)$.
- La famille $((1, 0), (0, 1))$ est libre dans \mathbb{R}^2 , puisque $a(0, 1) + b(1, 0) = (a, b) = (0, 0) \iff a = b = 0$.
- Dans l'exemple précédent, toutes les familles données sont libres, sauf $(1, j, j^2)$.
En effet, $j + j^2 + 1 = 0$ donc la famille $(1, j, j^2)$ est bien liée.
- (\cos, \sin) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet, si $a \cos + b \sin = 0$, alors en considérant l'image de 0 et l'image de $\frac{\pi}{2}$, on obtient respectivement $a = 0$ et $b = 0$.

Proposition

- Soient $u, v \in E$.
 - La famille (u) à un seul élément est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
 - La famille (u, v) est liée si et seulement si u et v sont colinéaires.
- Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
 - Toute famille qui contient une famille liée est liée.
- Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration. 1. Ce premier point est globalement évident. Il découle de la remarque sur le produit nul et de la définition de vecteurs colinéaires.

- Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs contenue dans une famille libre $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_q)$.

Montrons qu'elle est encore libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$.

Alors en posant $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q = 0$, on a aussi $\sum_{k=1}^q \lambda_k u_k = 0_E$.

Comme (u_1, \dots, u_q) est libre, on a nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0$.

En particulier : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. D'où l'implication.

- Il s'agit de la contraposée du point précédent.
- Sens indirect. Soit (u_1, \dots, u_p) une famille dont l'un des vecteurs est CL des autres. On peut

supposer que ce vecteur est u_p . On a alors μ_1, \dots, μ_{p-1} tels que $u_p = \sum_{k=1}^{p-1} \mu_k u_k$.

Mais alors $\sum_{k=1}^{p-1} \mu_k u_k - 1u_p = 0_E$. Comme $-1 \neq 0$ est un coefficient, la famille est bien liée.

- Sens direct. Soit (u_1, \dots, u_p) une famille liée. On sait qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E$. Comme les λ_k sont non tous nuls, on dispose de $k_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que

$$\lambda_{k_0} \neq 0. \text{ Mais alors : } u_{k_0} = -\frac{1}{\lambda_{k_0}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq k_0}} \lambda_k u_k = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq k_0}} -\frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}} u_k.$$

Donc u_{k_0} est bien combinaison linéaire des autres vecteurs. □

3. Bases et dimension

Définition

On dit que la famille (u_1, \dots, u_p) est une **base de E** lorsqu'elle est **à la fois libre et génératrice**

Proposition

(u_1, \dots, u_p) est une base de E si et seulement si :

$$\forall v \in E, \quad \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad v = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

c'est-à-dire : chaque vecteur de E admet une unique écriture comme combinaison linéaire de u_1, \dots, u_p . Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelées les **coordonnées de v dans la base (u_1, \dots, u_p)** .

Démonstration. • Sens direct. On suppose que (u_1, \dots, u_p) est libre et génératrice.

Soit $v \in E$. Comme la famille est génératrice, on dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $v = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$.

Reste à prouver que les coefficients (λ_k) sont uniques.

Soit $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $v = \sum_{k=1}^p \mu_k u_k$. Montrons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (\mu_1, \dots, \mu_p)$.

On sait que $\sum_{k=1}^p \mu_k u_k = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$, donc $\sum_{k=1}^p (\mu_k - \lambda_k) u_k = 0_E$.

Comme la famille est libre, ceci nous donne que $\mu_1 - \lambda_1 = \dots = \mu_p - \lambda_p = 0$. D'où l'unicité.

- Sens direct. Si chaque vecteur de E admet une unique écriture comme combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_p) , alors la famille est immédiatement génératrice.

On sait de plus que $0_E = \sum_{k=1}^p 0u_k$, et que cette décomposition est unique, donc la famille est aussi libre. D'où le résultat. □

Exemple

1. $((1, 0), (0, 1))$ et $((1, 0), (1, 1))$ sont deux bases de \mathbb{R}^2 .
2. $(1, i)$ et $(1, j)$ sont deux bases de \mathbb{C} comme \mathbb{R} -espace vectoriel.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^n , appelée la **base canonique**.
4. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, également qualifiée de **base canonique**.

Exercice 3. • Soit A le sev de \mathbb{R}^3 défini par $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y - 4z = 0\}$.
 Déterminer une base de A .

- Même question avec $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.

IV Dimension finie

Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que E est **de dimension finie** si E admet une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple

- D'après les exemples précédents, \mathbb{K}^n et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Pour le montrer, supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$.
 Notons $d = \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_n)) \in \mathbb{N}$. Alors $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}_N[X]$, donc $\text{Vect}(P_1, \dots, P_n) \subset \mathbb{R}_N[X]$, donc $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{R}_N[X]$. C'est absurde.
- $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension infinie.

Théorème

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet des bases, et ces bases sont **toutes de même cardinal**.

On appelle **dimension de E** , notée $\dim(E)$, le cardinal d'une (de toutes les) base(s) de E .

Exemple

- Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.
- (1) est une base de \mathbb{R} , donc $\dim(\mathbb{R}) = 1$.
- $(0, 1), (1, 1)$ est une base de \mathbb{R}^2 , donc $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, et plus généralement : $\forall n \in \mathbb{N}, \dim(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ puisque la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ contient $(n + 1)$ vecteurs.
- \mathbb{C} est de dimension 1 en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel, et de dimension 2 en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel.

1. Familles de vecteurs en dimension finie

Théorème (de la base extraite / Familles génératrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit \mathcal{F} une famille génératrice de E . Alors :

- \mathcal{F} contient une base de E .
- \mathcal{F} possède au moins n éléments.
- Si \mathcal{F} possède exactement n éléments, alors \mathcal{F} est une base de E .

Démonstration. Idée de la preuve :

- Si \mathcal{F} est libre, alors c'est déjà une base.
- Sinon, il existe un vecteur de \mathcal{F} qui s'exprime comme combinaison linéaire des autres. Si on retire

ce vecteur de la famille \mathcal{F} , elle reste génératrice.

- On recommence ce processus jusqu'à obtenir une famille libre. La famille obtenue est bien une base contenue dans \mathcal{F} , et est donc nécessairement de cardinal n (d'après le théorème admis).
- En particulier, $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq n$, et si $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$, alors la base obtenue est de même cardinal que \mathcal{F} , donc \mathcal{F} est bien une base de E .

□

Méthode

Pour extraire une base d'une famille génératrice de vecteurs, on suit la méthode présentée ci-dessus.

Théorème (de la base incomplètes / Familles libres)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit \mathcal{F} une famille libre de E . Alors :

- \mathcal{F} peut être complétée en une base de E .
- \mathcal{F} possède au plus n éléments.
- Si \mathcal{F} possède exactement n éléments, alors \mathcal{F} est une base de E .

Démonstration. Idée de la preuve :

- Si \mathcal{F} est génératrice, alors c'est déjà une base.
- Sinon, il existe un vecteur de E qui ne s'exprime pas comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} . Si on ajoute ce vecteur à la famille \mathcal{F} , elle reste donc libre.
- On recommence ce processus jusqu'à obtenir une famille génératrice. La famille obtenue est bien une base qui contient \mathcal{F} , et est donc nécessairement de cardinal n (d'après le théorème admis).
- En particulier, $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq n$, et si $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$, alors la base obtenue est de même cardinal que \mathcal{F} , donc \mathcal{F} est bien une base de E .

□

Méthode

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base de E , il suffit :

- Soit de montrer qu'elle est libre et qu'elle possède exactement n éléments.
- Soit de montrer qu'elle est génératrice et qu'elle possède exactement n éléments.

En pratique, il est souvent plus simple de montrer qu'elle est libre.

Exemple

- On veut montrer que $((1, 1), (2, -3))$ est une base de \mathbb{R}^2 .
On sait que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc il suffit de montrer que la famille est libre, ou qu'elle est génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1, 1) + \mu(2, -3) = (0, 0)$.
Alors $\lambda + 2\mu = 0$ et $\lambda - 3\mu = 0$. $L_1 + L_2$ donne $-\mu = 0$ donc $\mu = 0$, puis directement $\lambda = -2\mu = 0$. La famille est bien libre, donc il s'agit d'une base de \mathbb{R}^2 !
- Montrons que $\mathcal{B} = (X^3, X^2 + 2X + 1, X - 3, 7)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Elle fait la bonne taille, puisque $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Montrons qu'elle est libre.
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $aX^3 + b(X^2 + 2X + 1) + c(X - 3) + 7d = 0$.
En identifiant les coefficients, on trouve $a = 0$, $b = 0$, $2b + c = 0$ et $b - 3c + 7d = 0$. Ainsi, $a = b = c = d = 0$. La famille est bien libre, donc c'est une base !

2. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

- F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$

Démonstration.

Si $F = \{0_E\}$, le résultat est vrai. On applique l'algorithme de la base incomplète, en partant de la famille libre (u) où $u \in \mathcal{F}$ avec $u \neq 0_E$. On sait que l'algorithme s'arrête avant l'étape $\dim(E)$, puisque toute famille de cardinal $\dim(E) + 1$ de $F \subset E$ est nécessairement liée.

La famille obtenue par ce procédé est bien une base de F , de cardinal $\leq \dim(E)$.

Si $F = E$, on a $\dim(F) = \dim(E)$.

Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ avec \mathcal{F} une base de F , qui est donc de cardinal $\dim(F) = \dim(E)$. Mais alors la famille \mathcal{F} de E est libre et possède $\dim(E)$ vecteurs, donc c'est aussi une base de E .

Ainsi, $F = \text{Vect}(\mathcal{F}) = E$. □

Corollaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est :

- une droite vectorielle lorsque $\dim(F) = 1$.
- un plan vectoriel lorsque $\dim(F) = 2$.
- un **hyperplan** de E lorsque $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

3. Rang d'une famille de vecteurs

Définition

Soit E un espace vectoriel, et \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . On appelle **rang de \mathcal{F}** la dimension de l'espace vectoriel engendré par \mathcal{F} :

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}))$$

Exemple

Soient $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 1, -1, 1)$. On cherche le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) .

- On détermine si la famille est libre. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = (a + d, b + d, c - d, a + b + c + d)$. En résolvant le système associé à $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$, on obtient des solutions non triviales, donc la famille est liée.
- On obtient également que u_4 peut s'écrire comme $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$, donc on a $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On résout le système linéaire associé à $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$, ie $(a, b, c, a + b + c) = (0, 0, 0, 0)$. On obtient comme seule solution $a = b = c = 0$, donc cette famille est libre.
- Ainsi, (u_1, u_2, u_3) est une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, donc la famille est de rang 3.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et \mathcal{F} une famille de p vecteurs de E . Alors :

- $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ et $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$.
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = n = \dim(E) \iff \mathcal{F}$ est une famille génératrice de E .
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = p = \text{Card}(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F}$ est une famille libre.
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F}$ est une base de E .

Démonstration. On note $F = \overrightarrow{\mathcal{F}}$, de sorte que $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(F)$.

- \mathcal{F} est une famille génératrice de F , donc on a $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(F) = \text{rg}(\mathcal{F})$.
De plus, F est un sev de E , donc $\dim(F) = \text{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
- Si $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$, alors F est un sev de E qui a la même dimension que E , donc on a $E = F = \text{Vect } \mathcal{F}$: \mathcal{F} est bien génératrice de E .
- Si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$, alors la dimension de F vaut p , et la famille \mathcal{F} est génératrice de F et possède exactement p vecteurs.
Ainsi, \mathcal{F} est une base de F : elle est libre.
- C'est la conjonction des deux points précédents.

□

Théorème

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de \mathbb{K}^n .

On note $M_{\mathcal{F}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont les p colonnes correspondent respectivement aux vecteurs (u_1, \dots, u_p) . Alors :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(M_{\mathcal{F}})$$

Méthode (détermination du rang)

On écrit la matrice associée à la famille de vecteurs, et on l'échelonne à l'aide du Pivot de Gauss. Le rang de la matrice obtenue est le même que celui de la famille de vecteurs considérée.

Exemple

Reprenons la famille de l'exemple précédent. La matrice associée est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_1 - L_2 - L_3$ (qui revient à faire 3 transvections consécutivement) donne la

matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est échelonnée de rang 3, donc le rang de la famille de vecteurs est 3.