Chapitre 2 – Trigonométrie

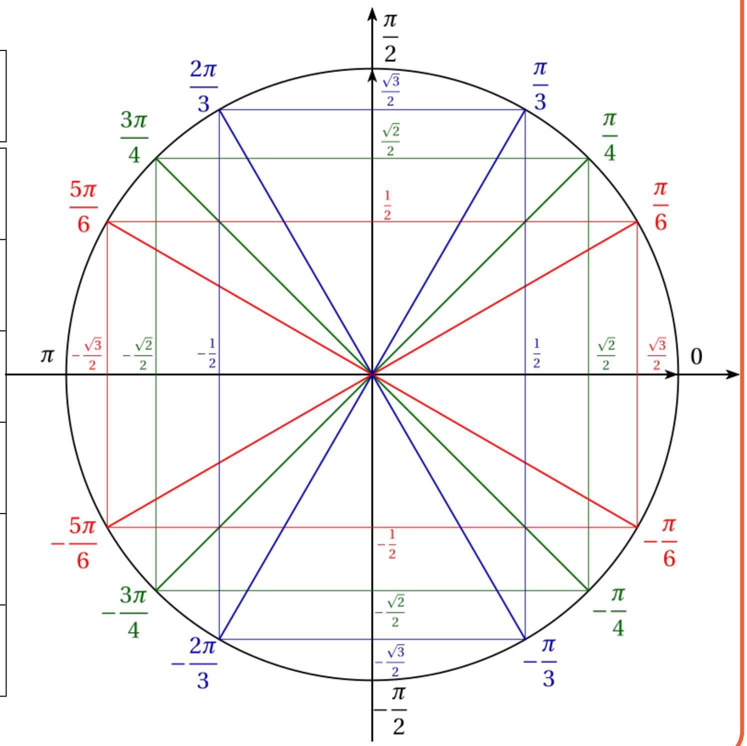
I Définition

On se place dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, et on considère $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et M l'unique point de $\mathcal{C}$ tel que l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ ait pour mesure (en radians) θ.
Alors on définit $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ comme étant les coordonnées du point M dans le repère.
Si $\cos(\theta) \neq 0$, on définit $\tan(\theta)$ comme étant le quotient $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Proposition (*Valeurs particulières*)

θ (rad)	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	**ND**
π	-1	0	0



Remarque. $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ sont définis pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Par contre, $\tan(\theta)$ est n'est pas défini en $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, et tous les angles associés. Son domaine de définition est $\mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.
Dans toute la suite, les formules impliquant la tangente sont vraies dès qu'elles ont un sens !

Proposition
On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
Et dès que ça a un sens : $\tan^2(\theta) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$.

II Symétries et périodicités

Les symétries du cercle permettent d'énoncer de multiples formules, à savoir retrouver à partir d'un dessin !

Règle de calcul

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x) \qquad \sin(x+2\pi)=\sin(x) \qquad \tan(x+2\pi)=\tan(x)$$

$$\cos(-x)=\cos(x) \qquad \sin(-x)=-\sin(x) \qquad \tan(-x)=-\tan(x)$$

$$\cos(\pi+x)=-\cos(x) \qquad \sin(\pi+x)=-\sin(x) \qquad \tan(\pi+x)=\tan(x)$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos(x) \qquad \sin(\pi-x)=\sin(x) \qquad \tan(\pi-x)=-\tan(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan(x)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)}$$

Remarque. On trouve notamment que les fonctions cos, sin et tan sont toutes 2π-périodiques (tan est même π-périodique), que cos est paire et que sin et tan sont impaires.

III Formules d'addition et conséquences

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, dès que ça a un sens :

Proposition

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

Corollaire

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

$$\begin{aligned}\cos(2a)&=\cos^2(a)-\sin^2(a)\\&=1-2\sin^2(a)\\&=2\cos^2(a)-1\end{aligned} \qquad \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

Démonstration. Pour les formules avec $a-b$, on utilise simplement l'écriture $a-b=a+(-b)$ et les propriétés de parité.
Pour les formules avec $2a$, on écrit simplement $2a=a+a$, et on utilise le fait que $\cos^2+\sin^2=1$.
Pour la tangente : $\tan(a)+\tan(b)=\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}+\dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}=\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$

$1-\tan(a)\tan(b)=1-\dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}=\dfrac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}=\dfrac{\cos(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$

Donc $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\tan(a+b)$. $\square$

Corollaire

$$\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

IV Équations trigonométriques simples

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| > 1$, alors l'équation $\cos(x) = a$ n'a aucune solution réelle.
- Si $a \in [-1;1]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0;\pi[$.
  L'ensemble des solutions de l'équation est alors $\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque.

- Pour $a \in [-1;1]$, x_0 s'appelle l'**arccosinus** de a, et est noté $\arccos(a)$ (ou parfois $acos(a)$ ou $\cos^{-1}(a)$). On a $\arccos(a) \in [0;\pi[$.
- Pour tous $x, \theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) = \cos(\theta) \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & \theta\ [2\pi] \\ & \textbf{ou} & \\ x & \equiv & -\theta\ [2\pi] \end{array}\right.$

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| > 1$, alors l'équation $\sin(x) = a$ n'a aucune solution réelle.
- Si $a \in [-1;1]$, l'équation $\sin(x) = a$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
  L'ensemble des solutions de l'équation est alors $\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque.

- Pour $a \in [-1;1]$, x_0 s'appelle l'**arcsinus** de a, et est noté $\arcsin(a)$ (ou parfois $asin(a)$ ou $\sin^{-1}(a)$). On a $\arcsin(a) \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
- Pour tous $x, \theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) = \sin(\theta) \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & \theta\ [2\pi] \\ & \textbf{ou} & \\ x & \equiv & \pi - \theta\ [2\pi] \end{array}\right.$

Proposition

Soient $c, s \in \mathbb{R}$. Alors le système d'équations $\left\{\begin{array}{ccc} \cos(\theta) & = & c \\ \sin(\theta) & = & s \end{array}\right.$ admet des solutions si et seulement si $c^2 + s^2 = 1$.
Si c'est le cas, il admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{x_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $\tan(x) = a$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
L'ensemble des solutions de l'équation est alors $\mathcal{S} = \{x_0 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque.

- Pour $a \in \mathbb{R}$, x_0 s'appelle l'**arctangente** de a, et est noté $\arctan(a)$ (ou parfois $atan(a)$ ou $\tan^{-1}(a)$). On a $\arctan(a) \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
- Pour tous $x, \theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a $\tan(x) = \tan(\theta) \iff x \equiv \theta\ [\pi]$.

Pour résoudre une équation faisant intervenir un cosinus ou un sinus, on se ramène à une de ces équations simples, éventuellement à l'aide d'un changement de variable.
Et pour une inéquation : il faut *toujours* s'aider du **cercle trigonométrique** !

V Transformation de $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$

Proposition

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $(a,b)\neq(0,0)$. Alors on a, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$a\cos(\theta)+b\sin(\theta)=r\cos(\theta+\varphi)$$

où $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et φ vérifie $\cos(\varphi)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi)=\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration. Pour $r>0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$, on sait que $r\cos(\theta+\varphi)=r\left(\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)\right)=(r\cos(\varphi))\cos(\theta)+(-r\sin(\varphi))\sin(\theta)$.

Analyse : On cherche donc r et φ qui vérifient : $\begin{cases} r\cos(\varphi) &= a\\ -r\sin(\varphi) &= b\end{cases}$.

En additionnant le carré de chacune des deux lignes, on voit que r doit vérifier $r^2=a^2+b^2$. On pose donc $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Le système devient $\begin{cases}\cos(\varphi) &= \dfrac{a}{r} &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin(\varphi) &= \dfrac{-b}{r} &= \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$.

Comme $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$, le système admet bien des solutions.

Synthèse : Posons $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi\in\mathbb{R}$ une solution du système ci-dessus. Alors on a bien pour tout $\theta\in\mathbb{R}$: $r\cos(\theta+\varphi)=r\left(\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)\right)=a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$. □

Exemple

On veut résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
Pour cela, on cherche $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=r\cos(\theta+\varphi)$.
On sait que $r^2=\sqrt{3}^2+(-1)^2=4$ donc on pose $r=2$.
Puis on sait que $\cos(\varphi)=\dfrac{\sqrt{3}}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\varphi)=\dfrac{-1}{-r}=\dfrac{1}{2}$, donc on pose $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.
On peut donc écrire $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
L'équation devient alors $2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$, c'est-à-dire $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ceci est équivalent à : $\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{6} &\equiv & \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]\\ & \textbf{ou} & \\ x &\equiv & -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x &\equiv & \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} & \equiv \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]\\ & \textbf{ou} & & \\ x &\equiv & -\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} & \equiv \dfrac{-5\pi}{12}\ [2\pi]\end{cases}$.

D'où finalement $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{12}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{-5\pi}{12}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.