Chapitre 22 – Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Premières définitions

Définition

Une **application linéaire de E dans F** est une application $f : E \to F$ qui vérifie :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Autrement dit : elle **préserve les combinaisons linéaires**.
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque. Deux autres définitions possibles, équivalentes à la première, sont :

- $\forall u, v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$ **et** $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$
- $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Exemple

1. Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - 2z, 2x + y + z) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont bien des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
   Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$, et donc :
   $f(\lambda u + v) = (\lambda x + x' - 2(\lambda z + z'), 2(\lambda x + x') + \lambda y + y' + \lambda z + z') = (\lambda(x - 2z) + x' - 2z', \lambda(2x + y + z) + 2x' + y' + z') = \lambda f(u) + f(v)$. Donc f est bien une application linéaire ! On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
2. Montrer de la même manière que $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire.
3. Soit $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$. $h((1, 0) + (0, 1)) = h(1, 1) = 1$ mais $h(0, 1) = h(1, 0) = 0$ et $0 + 0 \neq 1$.
   Ainsi, h ne préserve pas la somme : ce n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

- $f(0_E) = 0_F$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u_1, \dots, u_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(u_k)$.

Démonstration.

- On sait que $f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, donc $f(0_E) = 2f(0_E)$. D'où : $f(0_E) = 0_F$.
- C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$ par la définition des applications linéaires. On étend à n quelconque par récurrence !

□

Exemple (*Applications linéaires essentielles*)

- L'application **nulle** $u \in E \mapsto 0_F \in F$ est une application linéaire de E dans F. En effet, toute combinaison linéaire de 0_F donne encore 0_F !
- L'application **identité** : $u \in E \mapsto u \in E$ est une application linéaire de E dans E.
- Pour tout $a \in \mathbb{K}$, l'application $u \in E \mapsto au \in E$ est une application linéaire de E dans E, appelée l'**homothétie de rapport** a.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application **k-ième coordonnée** : $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_k \in \mathbb{K}$ est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout intervalle I, l'application dérivée : $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est linéaire.

Exemple (*Contre-exemples*)

- L'application $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+y+1 \in \mathbb{R}$ n'est pas linéaire.
  Tout simplement, l'image du vecteur nul $(0,0)$ est $1 \neq 0$!
- L'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2+y^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas une application linéaire. En effet, $f(0,2)=4$ mais $2 \times f(0,1) = 2 \times 1 = 2$.

Définition

- Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme de** E.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Une application linéaire **bijective** de E dans F est appelée un **isomorphisme** de E dans F.
- Une application linéaire **bijective** de E dans lui-même est appelée un **automorphisme de** E.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Exercice 1.
1. *Montrer que* $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x-2y+z, 3y, 2z-y)$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$.
2. *A-t-on* $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ *?*

Solution :
Pour la question 2, on montre que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ admet un unique antécédent par f. Soit $u=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $f(x,y,z) = u \iff \dots \iff (x,y,z) = \left(\frac{2a+b-c}{2}, \frac{b}{3}, \frac{b+3c}{6}\right)$, d'où l'existence et l'unicité d'un antécédent par f. De plus, on obtient f^{-1}, et on peut prouver aisément qu'on a encore $f^{-1} \in GL(\mathbb{R}^3)$.

II Opérations sur les applications linéaires

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$
- $\lambda f \in \mathcal{L}(E,F)$

Autrement dit : une somme d'applications linéaires de E dans F est encore une application linéaire de E dans F ; le produit par un scalaire d'une application linéaire de E dans F est encore linéaire.

Démonstration. Notons $h = f+g$ et $h' = \lambda f$. On a clairement $h, h' : E \to F$. Montrons que ces deux applications préservent les combinaisons linéaires. Soient $u, v \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
$h(\mu u+v) = f(\mu u+v) + g(\mu u+v) = \mu f(u) + f(v) + \mu g(u) + g(v)$ puisque f et g sont linéaires. D'où :
$h(\mu u+v) = \mu(f(u)+g(u)) + (f(v)+g(v)) = \mu h(u) + h(v)$. Ainsi h est bien linéaire.
De plus, $h'(\mu u+v) = \lambda f(\mu u+v) = \lambda(\mu f(u) + f(v))$ puisque f est linéaire. D'où :
$h'(\mu u+v) = \mu(\lambda f(u)) + \lambda f(v) = \mu h'(u) + h'(v)$. Ainsi, h' est encore linéaire. □

Remarque. Ainsi, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est lui-même un espace vectoriel ! Son élément nul est l'application nulle de E dans F.

Proposition (*Composition*)

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
Autrement dit, lorsqu'elle a un sens, une composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

Propriété

- $\forall f,g \in \mathcal{L}(E,F), \forall h \in \mathcal{L}(F,G), \forall \lambda \in \mathbb{K}: \quad h \circ (\lambda f + g) = \lambda h \circ f + h \circ g.$
- $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g,h \in \mathcal{L}(F,G), \forall \lambda \in \mathbb{K}: \quad (\lambda g + h) \circ f = \lambda g \circ f + h \circ f.$

Remarque.
- La composition n'est **pas commutative** ! Par exemple, avec $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y,x) \in \mathbb{R}^2$ et $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2$, on a bien $g \circ f$ et $f \circ g$ définis dans $\mathcal{L}(E)$, mais ....
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note souvent $f^2 = f \circ f$, et $f^3 = f \circ f \circ f$, etc.
  Ici, la puissance se fait pour la composition et pas pour le produit (ça n'aurait aucun sens !).
  Par exemple, avec f ci-dessus : $f^6 = id_E$ et $f^1 1 = f$.
- On a encore la **formule du binôme** dans le cas de deux endomorphismes de E qui **commutent**.

Proposition

1. Soit f un **isomorphisme** de E dans F. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est encore un isomorphisme, de F dans E.
2. Soit f un isomorphisme de E dans F et g un isomorphisme de F dans G.
   Alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque.
- Dans le cas où $F = E$, on obtient que la réciproque d'un **automorphisme** de E est encore un automorphisme de E, et que la composée de deux automorphismes est encore un automorphisme.
- Attention, la somme de deux isomorphismes n'est pas un isomorphisme en général !

III Image et noyau

1. Définitions

Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle :

- **noyau de** f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble des antécédents de 0_F par f :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$
- **image de** f, noté $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de E par f :
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in E\} = f(E)$$

Proposition

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.
- Pour $\mathrm{Ker}(f)$. On a directement $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ par définition, et comme f est linéaire, $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
  Soient $u, v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda u + v \in \mathrm{Ker}(f)$. On a :
  $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$, d'où $\lambda u + v \in \mathrm{Ker}(f)$.
- Pour $\mathrm{Im}(f)$. On a directement $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f)$.
  Soient $u, v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme $u, v \in \mathrm{Im}(f)$, on peut écrire $u = f(a)$ et $v = f(b)$ avec $a, b \in E$. Mais alors $\lambda u + v = \lambda f(a) + f(b) = f(\lambda a + b)$ où $\lambda a + b \in E$, donc $\lambda u + v \in \mathrm{Im}(f)$. □

Méthode (*En dimension finie*)

Pour déterminer une base et la dimension du noyau : on écrit $\text{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0\}$ sous forme *cartésienne*. On met cet espace sous forme paramétrique pour l'exprimer comme un Vect, et en déduire une base et sa dimension.

Pour déterminer une base et la dimension de l'image : on écrit $\text{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in E\}$ directement sous forme *paramétrique*, qu'on écrit comme un Vect. On en déduit une base et la dimension.

⚠ La famille obtenue dans un Vect est une famille génératrice de l'espace considéré, mais pas forcément une base ! Il faut vérifier qu'elle est libre, et sinon on doit extraire.

Exercice 2. *Pour chacune des applications suivantes : vérifier qu'elle est linéaire, et déterminer une base et la dimension du noyau, puis de l'image.*

a) $f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 2x + y - 2z)$

b) $g(x, y) = (x - y, 2x + 3y, -x, 5y + x)$

c) $a(x, y, z) = (x - y - 3z, 2x - z, x + y + 2z)$

d) $h(x, y, z, t) = (-y, my, x - mz - t)$, *où* $m \in \mathbb{R}$

2. Lien avec l'injectivité / la surjectivité

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
- f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration.

- C'est immédiatement la définition de $\text{Im}(f)$!
- Supposons que f est injective. Alors 0_F a au plus un antécédent par f. Mais on sait que $f(0_E) = 0_F$, donc 0_E est l'unique antécédent de 0_F par f. D'où $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
  Supposons désormais que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective. Soient $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$. Il s'agit de montrer que $u = v$.
  On sait que $f(u) = f(v)$, donc $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0_F$. Mais alors $u - v \in \text{Ker}(f)$, donc $u - v = 0_E$.
  Ainsi : $u = v$. D'où l'injectivité de f, et donc le résultat.

$\square$

Méthode

Pour montrer qu'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective :

- On pose un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = 0$.
- On montre que nécessairement $u = 0$.
- On en déduit que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, et donc f est injective.

Exemple

Montrer que l'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y)$ est injective.

IV Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** $n \in \mathbb{N}$, et F est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel quelconque.

1. Détermination par l'image d'une base

Soit f une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors pour tout $u \in E$, on peut décomposer u dans la base $\mathcal{B}$ par $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, et on a alors

$$f(u) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$$

Ainsi : **il suffit de connaître** $f(e_1), \dots, f(e_n)$ **pour connaître entièrement l'application** f.

Théorème

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour toute famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs de n, **il existe unique** application linéaire $f : E \to F$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(e_k) = v_k$.

Démonstration.

- Existence. Pour définir f, on doit donner les images $f(u)$ pour tout $u \in E$.
  Soit $u \in E$. On sait qu'il existe une unique décomposition de u dans la base $\mathcal{B}$ en $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.
  On définit alors $f(u)$ par
  $$f(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$
  On vérifie aisément que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = v_k$. Il reste à vérifier que l'application f ainsi définie est linéaire de E dans F. Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$.
  On a alors $\lambda u + v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda \beta_k e_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \lambda \beta_k) e_k$.
  D'où $f(\lambda u + v) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \lambda \beta_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k = f(u) + \lambda f(v)$.
  f est bien une application linéaire, donc elle convient.
- Unicité. Si f et g conviennent, alors pour tout $u \in E$, en écrivant $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, on a :
  $f(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(e_k) = g(u)$ par linéarité de f et g.
  D'où $f = g$. On a bien l'unicité.

$\square$

Corollaire

- Pour définir une application linéaire de E dans F , il suffit de donner l'image des vecteurs d'une base de E.
- Pour prouver l'égalité de deux application linéaires de E dans F , il suffit de prouver qu'elles sont égales sur une base de E.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $\mathcal{F} = f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Alors :

- f est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de F.
- f est bijective (isomorphisme) si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de F.

Démonstration.

- Supposons f injective. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F$.
  Alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0_F$, donc par injectivité, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$.
  Ainsi, par liberté de la base $\mathcal{B}$: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. D'où l'injectivité.
  Supposons réciproquement que la famille $\mathcal{F}$ est libre, et montrons que f est injective. On prend $u \in E$ tel que $f(u) = 0_F$, et on doit montrer que $u = 0_E$.
  On décompose $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$, et on peut alors écrire $f(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) = 0_F$.
  Ainsi, par liberté de $\mathcal{F}$: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, et donc $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$.
- C'est évident après avoir écrit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ (voir un peu plus bas).
- Il suffit de combiner les deux points précédents !

$\square$

2. Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in E\} &= \left\{ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(f(e_1), \dots, f(e_n)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
En particulier, c'est un espace de dimension finie, et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(E)$.

Définition

On définit le **rang** d'une application linéaire $f : E \to F$, noté $\mathrm{rg}(f)$, par : $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))}$

Avec $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, il s'agit aussi du rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème

Soit E $\boxed{\text{et } F}$ deux espaces de dimension finie. Alors :

1. $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$.
2. f est injective $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$.
3. f est surjective $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.
4. f est un isomorphisme $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration. On écrite $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{F} = f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$. On note aussi $p = \dim(F)$.

1. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ et $\mathrm{rg}(f) \leq p$ puisqu'on a n vecteurs dans un espace de dimension p.
2. f est injective $\iff$ $\mathcal{F}$ est libre $\iff$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ $\iff$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E)$
3. f est surjective $\iff$ $\mathcal{F}$ est génératrice de F $\iff$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(F)$ $\iff$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(F)$
4. f est bijective $\iff$ f est injective et surjective $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$

□

Corollaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

- Il existe une application linéaire injective de E dans F $\iff$ $\dim(E) \leq \dim(F)$.
- Il existe une application linéaire surjective de E dans F $\iff$ $\dim(E) \geq \dim(F)$.
- Il existe un isomorphisme de E dans F $\iff$ $\dim(E) = \dim(F)$.

3. Théorème du rang et conséquences

On a vu que si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie : $\mathrm{Ker}(f)$ parce qu'il est inclus dans E, $\mathrm{Im}(f)$ parce qu'il est engendré par la famille finie $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
Le théorème suivant, très important, relie les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème (*Théorème du rang*)

Soit E, F deux espaces vectoriels, avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\mathrm{Ker}(f) \subset E$, qu'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ de E.
Alors la famille image est $(f(e_1), \ldots, f(e_k), f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)) = (0_F, \ldots, 0_F, f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))$.
On a donc que $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par la famille $\mathcal{C} = (f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n))$, qui est de cardinal $n - k$.
Pour prouver que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k$, on doit alors prouver que la famille $\mathcal{C}$ est libre.

Soient $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$.

Alors $f\left(\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$, donc $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_k$ tels que $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i$, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} -\mu_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.
Par liberté de la base $\mathcal{B}$, on obtient $\mu_1 = \ldots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. D'où la liberté de $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ est alors une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - k = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. □

Corollaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\boxed{\dim(E) = \dim(F)}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

C'est en particulier vrai lorsque $F = E$, c'est-à-dire pour des *endomorphismes* en dimension finie !

V Matrice(s) d'une application linéaire

Dans toute la fin du chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, et F est un espace vectoriel de dimension finie n munie d'une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

1. Associations entre matrices et applications linéaires

2. Lien avec les opérations

3. Calcul du noyau et de l'image