

Chapitre 25 – Fonctions de deux variables réelles

I Généralités

1. Définition

Définition

On appelle **fonction de deux variables** toute application f dont l'ensemble de départ est une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 et l'ensemble d'arrivée est \mathbb{R} :

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{cases}$$

Définition

On appelle **pavé ouvert** de \mathbb{R}^2 toute partie de \mathbb{R}^2 de la forme $I \times J$ où I et J sont deux **intervalles ouverts** de \mathbb{R} .

Exemple 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et dire s'il s'agit d'un pavé ouvert de \mathbb{R}^2 .

- a) $f(x, y) = x \cos(x + y)$ b) $f(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$
 c) $f(x, y) = \ln(xy)$ d) $f(x, y) = \sqrt{x+y} \ln(1-x^2-y^2)$

2. Représentation et courbes de niveau

Définition

On considère l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

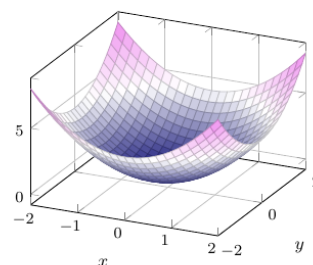
On définit la **surface représentative** de f comme étant l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ où $(x, y) \in \mathcal{D}$.

Exemple 2

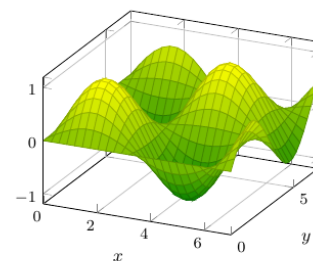
Associer à chacune des fonctions suivantes sa surface représentative. On pourra penser à considérer signe, valeurs, symétries, limites, etc.

- a) $f_1(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ b) $f_2(x, y) = x^2 + y^2$
 c) $f_3(x, y) = x^2 - y^2$ d) $f_4(x, y) = e^{-x^2-y^2}$
 e) $f_5(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$ f) $f_6(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

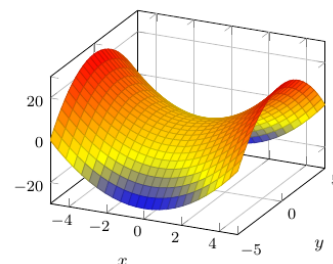
Surface d'équation $z =$



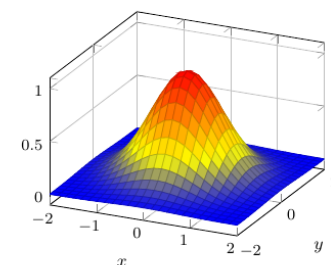
Surface d'équation $z =$



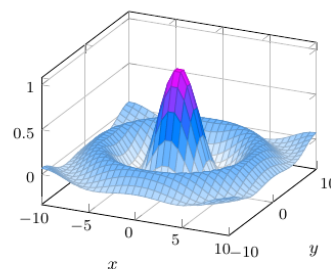
Surface d'équation $z =$



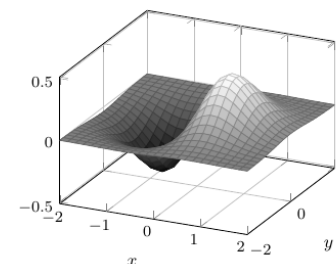
Surface d'équation $z =$



Surface d'équation $z =$



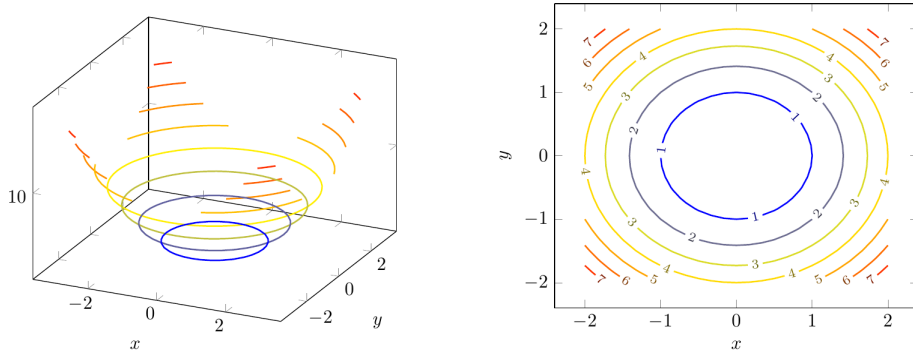
Surface d'équation $z =$



Définition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $a \in \mathbb{R}$.
 On appelle **courbe de niveau λ de f** l'ensemble des antécédents de a par f , c'est-à-dire : $\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = a\}$.

Exemple 3



Lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Déterminer les courbes de niveau de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-x^2 - y^2}$.

- Remarque.*
- La courbe de niveau a correspond à l'intersection de la surface représentative de f avec le plan horizontal d'équation $z = a$.
 - Les lignes de niveau sont très utilisées, notamment en cartographie.

3. Continuité

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$), et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.
 On dit que f est continue en (x_0, y_0) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathcal{D} :$$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \alpha \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 ($\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$).

Dans la pratique les fonctions que vous allez rencontrer sont souvent continues là où elles sont définies. De plus :

- Une combinaison linéaire de fonctions continues est continue.
- Un produit de fonctions continues est continu.
- Un quotient de fonctions continues est continu en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.
- La composée de fonctions continues est continue.

II Fonctions partielles

Définition

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un pavé $I \times J \subset \mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in I \times J$.

On appelle **fonctions partielles de f en (x_0, y_0)** les fonctions :

$$f(\cdot, y_0) : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x, y_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x_0, \cdot) : \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(x_0, y) \end{cases}$$

Exemple 4

Soit f définie par $f(x, y) = \sqrt{2x} - y$. f est définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

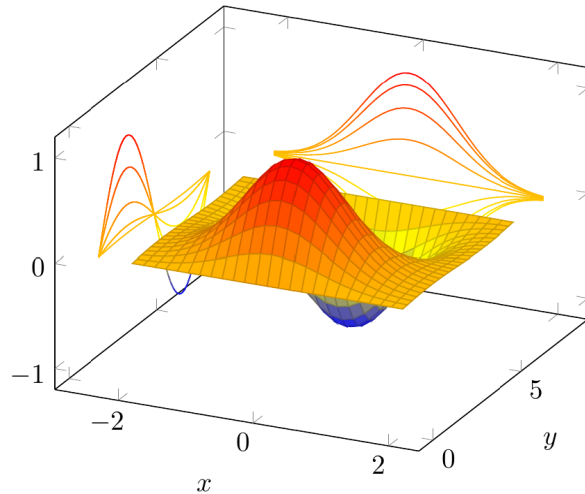
Ses applications partielles en $(3, 1)$ sont les fonctions :

- $f(\cdot, 1) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{2x} - 1$
- $f(3, \cdot) : y \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{6} - y$

Remarque. La courbe représentative de $f(\cdot, y_0)$ correspond à l'intersection de la surface représentative de f avec le plan vertical d'équation $y = y_0$. Idem pour $f(x_0, \cdot)$ avec le plan d'équation $x = x_0$.

Exemple 5

Quelques fonctions partielles de la fonction $f(x, y) = e^{-x^2} \sin(y)$.



⚠ Attention, Les applications partielles de f en (x_0, y_0) ne caractérisent **pas complètement** f au voisinage de ce point, elles ne donnent des informations que dans **deux directions privilégiées!**

Par exemple, il peut arriver que les fonctions partielles soient continues, mais que f ne soit pas elle-même continue.

Exemple 6

On considère la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Déterminer les applications partielles de f au point $(0, 0)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $f(t, t) = 1$.
3. En déduire que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

III Calcul différentiel

1. Dérivées partielles

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- Si la fonction partielle $f_1 = f(\cdot, y_0)$ est dérivable en x_0 , on dit que f admet une **dérivée partielle en x au point (x_0, y_0)** , en on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0)$$

- Si la fonction partielle $f_2 = f(x_0, \cdot)$ est dérivable en y_0 , on dit que f admet une **dérivée partielle en y au point (x_0, y_0)** , en on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_2(y_0)$$

- Si f admet des dérivées partielles en tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors on définit les fonctions dérivées partielles de f comme étant les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui sont définies sur \mathcal{D} (fonctions de 2 variables!)

Méthode

Pour calculer les dérivées partielles, on dérive l'expression de f par rapport à l'une des variables **en considérant l'autre comme fixée** (une constante).

Exemple 7

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

- a) $f(x, y) = x^2 + 2x - 3y^2 + 5$
- b) $f(r, \theta) = r \cos(\theta)$
- c) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$
- d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **de classe \mathcal{C}^1** sur \mathcal{D} lorsque f admet des dérivées partielles en tout point de \mathcal{D} et que toutes ces dérivées partielles sont continues sur \mathcal{D} .

2. Plan tangent

Définition

Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, on dit que sa surface représentative admet un **plan tangent** d'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Ce plan tangent permet d'approcher les valeurs de $f(x, y)$ lorsque (x, y) est proche de (x_0, y_0) , c'est-à-dire suite à une petite variation à partir de ce point. On écrira alors :

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

3. Opérations sur les dérivées partielles

Proposition

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g possèdent sur \mathcal{D} des dérivées partielles (par rapport à x et y), alors $\lambda f + g$ et fg possèdent des dérivées partielles, et on a :

$$\frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\lambda f + g)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial y} = f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y}$$

De plus si g ne s'annule pas sur \mathcal{D} :

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x} = \frac{1}{g^2} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial y} = \frac{1}{g^2} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

Proposition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Soit I un intervalle, et $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$ telles que $u(I) \times v(I) \subset \mathcal{D}$.

Alors la fonction $g : t \mapsto f(u(t), v(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et $\forall t \in I$:

$$g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

Remarque. En pratique, on retiendra que les règles de calcul habituelles s'appliquent aux calculs de dérivées partielles.

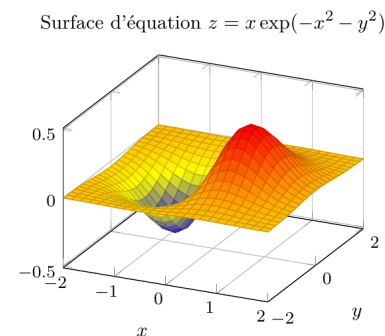
4. Gradient

Définition

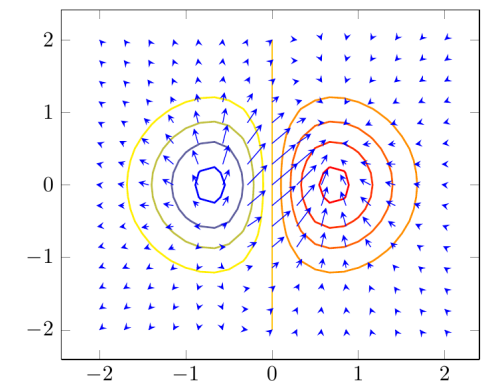
Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à x et y , on appelle **gradient de f en (x_0, y_0)** le **vecteur** dont les coordonnées sont les dérivées partielles :

$$\vec{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Remarque. Interprétation : Géométriquement la direction du gradient indique la direction suivant laquelle f **varie le plus vite**, la norme du gradient mesurant l'intensité de cette variation.

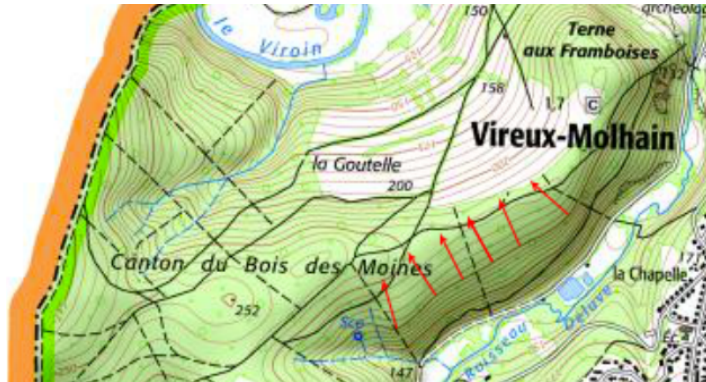


Gradients pour la fonction $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$



Exemple 8

- Déterminer le gradient de $f(x, y) = x^2e^{x+2y-1}$ au point $(1, 0)$.
- Dans une carte comme celle ci-dessous, comment s'interprète le gradient ? On a tracé quelques gradients en rouge.



5. Points critiques et extrema

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet des dérivées partielles. On appelle **point critique** de f tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ qui vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Théorème

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un pavé ouvert de \mathbb{R}^2 , et $(x_0, y_0) \in I \times J$.

Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) , alors (x_0, y_0) est un point critique de f , ie :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Remarque. • Ce théorème est utilisé pour restreindre l'étude des extrema d'une fonction de deux variables. On cherche d'abord les points critiques, puis on vérifie au cas par cas s'il s'agit d'un extremum ou non.

- \triangle **La réciproque est fautive** : On peut avoir un point critique sans pour autant avoir un extremum local !

Exemple 9

Étudier les points critiques, puis les extrema des fonctions :

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$

6. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ qui admet des dérivées partielles en tout point. Alors les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont encore des fonctions de deux variables, donc elles peuvent elles aussi admettre des dérivées partielles en x et y . Lorsque c'est le cas, on note :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Exemple 10

Déterminer toutes les dérivées partielles secondes de $f(x, y) = xe^{xy}$.

Théorème (de Schwarz)

Pour toute fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles d'ordre 2, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$