

Chapitre 3 – Vocabulaire des applications

I Généralités

Définition

On appelle **application** (ou **fonction**), la donnée de :

- un ensemble de départ E
- un ensemble d'arrivée F
- Pour tout $x \in E$, un unique élément $y \in F$, noté $y = f(x)$ et appelé l'image de x par f .

TODO : Dessin avec des patates

Vocabulaire

- On note $f : E \rightarrow F$, ou bien $f : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$, ou encore $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$
- Si $y = f(x)$, on dit que x est **un** antécédent de y par f .
- On appelle **graphe de f** le sous-ensemble de $E \times F$ constitué des couples $(x, f(x))$ pour $x \in E$.
 $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F$.
- On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E vers F .

Exemple

- L'expression $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ définit une application $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.
- Soit E un ensemble. On définit l'application **identité de E** comme étant $\text{id} : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$, c'est-à-dire $\text{id}(x) = x$.
- Soit E un ensemble et $A \subset E$ une partie de E . On définit l'**indicatrice** de A dans E , notée $\mathbb{1}_A$, par : $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$
NB : L'ensemble de départ est E , mais par abus, on omet souvent de préciser l'ensemble d'arrivée, qui peut être $\{0, 1\}$ ou $\mathbb{R}$ par exemple.
- Une suite n'est rien d'autre qu'une application avec $\mathbb{N}$ comme ensemble de départ !
Par exemple, l'application $u : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) = \frac{5}{3^n} \end{cases}$ correspond à la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
- $g : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ définit une application, qui correspond à la norme euclidienne d'un vecteur du plan réel.

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et $A \subset E$. On définit l'**image** (directe) de A par f , noté $f(A)$, comme étant l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\} \subset F$$

Exemple

Soit $c : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.

On a $c([2; 3]) = [4; 9]$, $c(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, $c(\mathbb{Z}) = \{\text{carrés parfaits}\}$.

On a $\exp(\mathbb{R}_+^*]1; +\infty[$ et $\cos([0; 2\pi]) = [-1; 1]$.

Définition

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

On définit la **composée** de f et g , notée $g \circ f$, par $g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow G \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$.

⚠ Attention à l'ordre des compositions ! Pour écrire $g \circ f$, l'ensemble d'arrivée de f doit être égal à l'ensemble de départ de g .

Exemple

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x - 1 \in \mathbb{R}$. Alors on a :
 $g \circ f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 1$, et $f \circ g : x \in \mathbb{R} \mapsto (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
⚠ La composition n'est pas commutative !
- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$.
On ne peut pas définir $g \circ f$ car l'ensemble d'arrivée de f n'est pas égal à (ni même inclus dans) l'ensemble de départ de g ! Par contre, on a $f \circ g(x) = |\ln(x)|$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
Pour pouvoir écrire $g \circ f$, il faut **restreindre** l'application f à $\tilde{f} : x \in \mathbb{R}^* \mapsto |x| \in \mathbb{R}_+^*$, et alors on peut écrire $g \circ f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \ln(|x|) \in \mathbb{R}$.
- Soit $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{R}$ une suite numérique réelle, et $S : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 1 \in \mathbb{N}$.
Alors la composition de u par S est la suite $u \circ S : n \in \mathbb{N} \mapsto u_{n+1} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle S le **décalage d'indice**, ou **shift**.

II Injections, surjections, bijections

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que :

- f est **injective** lorsque deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes :
 $\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ ou manière équivalente : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$.
- f est **surjective** lorsque tout élément de l'ensemble d'arrivée F est atteint par f (admet au moins un antécédent) : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$, ou de manière équivalente, $f(E) = F$.
- f est **bijjective** lorsque f est simultanément injective et surjective. De manière équivalente :
 $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Dessins avec des patates

Exemple

- L'application $c : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas injective, car $c(-1) = c(1) = 1$. Elle n'est pas surjective, car -1 n'admet pas d'antécédent par c . En fait, $c(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$
- L'application $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective, puisqu'elle est strictement croissante (pour $x < y$, on a $e^x < e^y$ donc $e^x \neq e^y$). Par contre, elle est à valeurs strictement positive donc elle n'est pas surjective!
- L'application $\ln :]0; +\infty[\subset \mathbb{R}$ est injective (strictement croissante) et surjective! En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $x = e^y$, on a $x > 0$ et $\ln(x) = \ln(e^y) = y$. Cette application est donc bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
- L'application identité d'un ensemble E est toujours bijective de E dans E .
- L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est bijective.
- Soit E un ensemble et $A \subset E$. Alors $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0; 1\}$ est surjective si et seulement si $A \neq \emptyset$ ou $A = E$.
De plus, si E possède au moins 3 éléments, alors $\mathbb{1}$ ne peut pas être injective.

Proposition

Une composée d'applications injectives (respectivement surjectives, bijectives) est injective (respectivement surjective, bijective).

Démonstration. • Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- On suppose d'abord que f et g sont injectives. Montrons qu'alors $g \circ f$ est injective. Soient $x, y \in E, x \neq y$. Alors par injectivité de f , $f(x) \neq f(y)$, donc par injectivité de g , $g(f(x)) \neq g(f(y))$. D'où l'injectivité de $g \circ f$.
- On suppose maintenant que f et g sont surjectives. Soit $z \in G$. Par surjectivité de g , on dispose de $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Mais par surjectivité de f , on dispose alors de $x \in E$, tel que $f(x) = y$. Donc on a $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. D'où la surjectivité.
- Si f et g sont bijectives, alors on a vu que $g \circ f$ est injective, et aussi surjective : elle est bijective. $\square$

III Application réciproque

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **bijjective**. Alors on peut définir son **application réciproque** $f^{-1} : F \rightarrow E$, qui associe à tout élément $y \in F$ l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Dessin avec des patates

Exemple

- On considère $a : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x - 2 \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$y = a(x) \iff y = 3x - 2 \iff y + 2 = 3x \iff \frac{y+2}{3} = x.$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = a(x)$, donné par $x = \frac{y+2}{3}$. Donc a

est bijective, et sa réciproque est $a^{-1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque est la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$.
- La fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$ est bijective.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $y = f(x) \iff y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$ (puisque $y \geq 0$).

Ainsi, sa réciproque est l'application $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ Il s'agit d'une **restriction** de l'application carrée.

Propriété

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives. Alors :

- $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$.
- f^{-1} est bijective, et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $g \circ f$ est bijective, et sa réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. • Par définition de f^{-1} !

- Soient $y, y' \in F$. tels que $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Alors $f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y'))$ donc $y = y'$. D'où l'injectivité. Soit $x \in E$. On a $x = f^{-1}(f(x))$, donc $x \in f^{-1}(F)$. D'où la surjectivité. Enfin, par définition, l'unique antécédent de x par f^{-1} est $f(x)$, donc on a bien $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $g \circ f$ est bijective comme composée de 2 bijections. De plus, on a, pour $z \in G$ et $x \in E$:
 $z = g(f(x)) \iff g^{-1}(z) = f(x) \iff f^{-1}(g^{-1}(z)) = x$. Donc $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

IV Vocabulaire des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On s'intéresse dans cette partie aux applications dont les ensembles de départ et d'arrivée sont inclus dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, on prendra $E, F \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels dispose d'une **structure** spécifique, avec des opérations $(+, -, \times, \div)$ et un ordre $(\leq)$, qui rendent plus riche l'étude des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarquons déjà que les opérations se transmettent aux fonctions, et qu'on pourra écrire pour toutes fonctions $f, g : E \rightarrow \mathbb{R} : f + g, f - g, f \times g$ et, si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$.

Notons aussi que le graphe de ces fonctions est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire un ensemble de points du plan, qui peut donc être représenté dans le plan.

1. Fonctions et ordre

Définition

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **majorée** si $f(E)$ est majorée, c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M$.
- f est **minorée** si $f(E)$ est minorée, c'est-à-dire : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geq m$.
- f est **bornée** si $f(E)$ est bornée, c'est-à-dire : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leq f(x) \leq M$.
De manière équivalente, f est bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \in [-M, M]$.

Exemple

- $\exp$ est minorée (par 0) mais non majorée donc non bornée.
- $\cos$ et $\sin$ sont bornées car elles sont à valeurs dans $[-1, 1]$.
- La fonction $x \mapsto x^3$ n'est ni minorée ni majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que :

- f est **croissante** (sur E) lorsque : $\forall x, y \in E, (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$.
- f est **décroissante** (sur E) lorsque : $\forall x, y \in E, (x \leq y \implies f(x) \geq f(y))$.
- f est **monotone** (sur E) lorsque f est soit croissante soit décroissante sur E .

Remarque. • Une fonction croissante **conserve l'ordre**, une fonction décroissante **inverse l'ordre**.

- Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.
- On définit de même les fonctions **strictement** (dé)croissantes, en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Exemple

- $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto x^2$ est non monotone sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- $\cos$ et $\sin$ sont non monotones sur $\mathbb{R}$.
- Une fonction affine est toujours monotone, son sens de variation dépendant du signe de sa pente.

2. Périodicité et symétries

Parité et périodicité
Graphe de la réciproque

Définition

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $E \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, c'est à dire que $\forall x \in E, -x \in E$. On dit que :

- f est **paire** si $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Remarque. • Une fonction est paire si et seulement si son graphe dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- Une fonction est impaire si et seulement si son graphe dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est paire. La fonction $x \mapsto x^3$ est impaire.

La fonction $\exp$ n'est ni paire ni impaire.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}$. On dit que f est **T -périodique** si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.

On dit que f est périodique s'il existe une **période** $T \in \mathbb{R}$ telle que f est T -périodique.

Exemple

L'exemple par excellence est celui des fonctions trigonométriques : $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques !

La fonction *partie fractionnaire* $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle ne peut pas être périodique.

Proposition

Soient $E, F \subset \mathbb{R}$, et $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Alors les graphes de f et de f^{-1} en repère orthonormé sont **symétrique l'un de l'autre par rapport à la diagonale** $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Exemple

TODO : tikz ? Exp et logarithme népérien. Racine carrée et restriction de $x \mapsto x^2$ à $\mathbb{R}^+$.