# Chapitre 5 – Nombres complexes

## I Forme algébrique

### 1. Définitions

**Définition**

Soit $i$ un nombre tel que $\boxed{i^2 = -1}$.

On définit l'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, par : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

*Remarque.*
- $a$ est appelé la **partie réelle** de $z$, et est notée $\text{Ré}(z)$.
  $b$ est appelé sa **partie imaginaire**, et est notée $\text{Im}(z)$.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- On appelle **forme algébrique de** $z \in \mathbb{C}$ son unique écriture sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

**Exemple 1**

- $z = 1 - 5i$ est un nombre complexe ($z \in \mathbb{C}$), tel que $\text{Ré}(z) = 1$ et $\text{Ré}(z) = -5$.
- 

| $z$ | $2+3i$ | $-1+\frac{1}{2}i$ | $4i-5$ | $-i$ | $\sqrt{2}$ | $7i+i^2$ | $\frac{5-2i}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\text{Ré}(z)$ | | | | | | | |
| $\text{Im}(z)$ | | | | | | | |
| $\overline{z}$ | | | | | | | |
| $\lvert z\rvert$ | | | | | | | |

**Définition**

Lorsque $\text{Im}(z) = 0$, on dit que $z$ est un nombre **réel**. On a donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ !
Lorsque $\text{Ré}(z) = 0$, on dit que $z$ est un nombre **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des imaginaires purs.

**Proposition**

Les opérations sur $\mathbb{C}$ généralisent naturellement celles définies sur $\mathbb{R}$, en ajoutant la condition $i^2 = -1$.
Les opérations ont les mêmes propriétés (commutativité, distributivité de $\times$ sur $+$, …).
Ainsi, $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$ et $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
En particulier, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ : $\boxed{\text{Ré}(z + z') = \text{Ré}(z) + \text{Ré}(z') \text{ et } \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')}$.

**Exemple 2**

- Déterminons $\text{Ré}((3 - i)(2i + 4))$.
  On a : $(3 - i)(2i + 4) = 3 \times 2i + 3 \times 4 - i \times 2i - i \times 4 = 6i + 12 - 2i^2 - 4i = 2i + 12 + 2i = 4i + 12$
  D'où $\text{Ré}(z) = 12$.
- Mettre sous forme algébrique : $(2 - 5i)^2$, $i^3$, $i^{10}$.

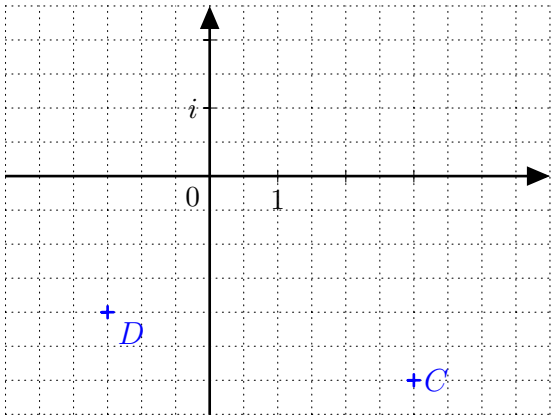
## 2. Représentation graphique

À l'instar de $\mathbb{R}$, souvent représenté par la droite des réels, $\mathbb{C}$ s'identifie souvent au **plan**. La partie réelle et la partie imaginaire correspondent alors aux coordonnées d'un point ou vecteur du plan.

**Définition**

- On associe à tout nombre complexe $z$ le point du plan de coordonnées $(\text{Ré}(z), \text{Im}(z))$, ou le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}\text{Ré}(z)\\ \text{Im}(z)\end{pmatrix}$.
- Réciproquement, à tout point $M(x,y)$ du plan (resp. vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$), on associe le nombre complexe $z = x + iy$. $z$ est appelé **l'affixe** de $M$ (resp. de $\vec{u}$), et on note parfois $z_M$ ou $z_{\vec{u}}$.

**Exemple 3**




1. Donner les affixes respectives :
   - du point $C$ : $z_C =$
   - du point $D$ : $z_D =$
   - du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$ : $z_{\vec{u}} =$
2. Placer sur le graphique :
   - le point $M$ d'affixe $z_M = 2i + 1$
   - le point $N$ d'affixe $z_N = \dfrac{7-3i}{2}$
   - Le vecteur $\vec{v}$ d'affixe $\dfrac{1}{3}z_C$
   - Le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_C - z_D$

**Propriété**

L'addition de deux complexes correspond à la somme des vecteurs qui leur sont associés.
Il en va de même pour la différence, et la multiplication par un nombre réel.
Ainsi, multiplier un complexe par un **réel** $\lambda$ correspond à réaliser une homothétie de rapport $\lambda$.

## 3. Conjugué

**Définition**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

On définit son **conjugué** comme étant le nombre complexe : $\boxed{\overline{z} = a - ib}$

On a donc : $\begin{cases}\text{Ré}(\overline{z}) &= &\text{Ré}(z)\\ \text{Im}(\overline{z}) &= &-\text{Im}(z)\end{cases}$

**Exemple 4**

1. Compléter l'avant-dernière ligne du tableau dans le premier exemple de ce chapitre.
2. Placer dans le graphique précédent que le point $D'$ d'affixe $\overline{z_D}$. Que constate-t-on ?

*Remarque.*
- Géométriquement, la conjugaison correspond à une **symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses**.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$, et $\overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$.

**Proposition**

La conjugaison complexe :

- est **involutive** : $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- est **linéaire** : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
- **passe au produit et au quotient** : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ : $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

**Proposition**

Pour tout $z = a + ib$ complexe, on a :

- $z + \overline{z} = 2\,\text{Ré}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}$

*Démonstration.*

- $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\text{Ré}(z)$
- $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\,\text{Im}(z)$
- $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$
  On encore : $\overline{z\overline{z}} = \overline{z}\,\overline{\overline{z}} = \overline{z}z = z\overline{z}$, donc on a bien $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

□

**Méthode**

Pour mettre sous forme algébrique un quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par **le conjugué du dénominateur**.

**Exemple 5**

$$\begin{aligned}\frac{3-i}{2+5i} &= \frac{(3-i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6-15i-2i+5i^2}{4-25i^2} \\ &= \frac{6-17i-5}{4+25} \\ &= \frac{1-17i}{29} = \frac{1}{29} + i\left(-\frac{17}{29}\right)\end{aligned}$$

## 4. Module

**Définition**

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit son **module**, noté $|z|$, par : $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$

*Remarque.*

- On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ : $|z| \in \mathbb{R}_+$, et $|z| = 0 \iff z = 0$.
- Le module d'un nombre réel correspond à sa valeur absolue, c'est pourquoi on utilise la même notation !
- À l'instar de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, le module d'un nombre complexe correspond à la distance du point d'affixe $z$ à l'origine. De même, $|z - z'|$ correspond à la distance entre les deux points d'affixe respective $z$ et $z'$.
- Le module correspond à la **norme du vecteur associé**.

**Exemple 6**

Compléter la dernière ligne du tableau dans le premier exemple de ce chapitre.

**Propriété**

Le module complexe :

- passe à la multiplication et au quotient (et donc à la multiplication par un réel) : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ : $|zz'| = |z||z'|$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- passe à la conjugaison : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$.
- vérifie : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ z\overline{z} = |z|^2}$

⚠ Comme la valeur absolue, le module *ne passe pas à l'addition ni à la soustraction !*

**Proposition**

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ : on a :

- **Inégalité triangulaire :** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
  avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$ ou si $z' = 0$.
- $|\operatorname{Ré}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

⚠ Il n'existe pas d'**ordre** sur $\mathbb{C}$ qui prolongerait celui sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on ne doit jamais avoir de nombre complexe (non réel) dans une inégalité !