Chapitre 5 – Nombres complexes

I Forme algébrique

1. Définitions

Définition

Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.
On définit l'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, par :

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarque. • Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un **unique** couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a + ib$.

- a est appelé la **partie réelle** de z, et est notée $\text{Ré}(z)$.
  b est appelé sa **partie imaginaire**, et est notée $\text{Im}(z)$.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Exemple

- $z = 1 - 5i$ est un nombre complexe ($z \in \mathbb{C}$), tel que $\text{Ré}(z) = 1$ et $\text{Ré}(z) = -5$.
-

z	$2 + 3i$	$-1 + \frac{1}{2}i$	$4i - 5$	$-i$	$\sqrt{2}$	$7i + i^2$	$\frac{5 - 2i}{3}$
$Re(z)$							
$Im(z)$							

Définition

Lorsque $\text{Im}(z) = 0$, on dit que z est un nombre **réel**. On a donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$!
Lorsque $\text{Ré}(z) = 0$, on dit que z est un nombre **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Proposition

Les opérations sur $\mathbb{C}$ généralisent naturellement celles définies sur $\mathbb{R}$, en ajoutant la condition $i^2 = -1$.
Les opérations ont les mêmes propriétés (par exemple la commutitivité, ou encore la distributivité de $\times$ sur $+$).
Ainsi, $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$ et $(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Exemple

- Déterminons $\text{Ré}\,((3-i)(2i+4))$.
  On a : $(3-i)(2i+4) = 3\times 2i + 3\times 4 - i\times 2i - i\times 4 = 6i + 12 - 2i^2 - 4i = 2i + 12 + 2i = 4i + 12$
  D'où $\text{Ré}(z) = 12$.
- Mettre sous forme algébrique : $(2-5i)^2$, i^3, i^10.

2. Représentation graphique

À l'instar de $\mathbb{R}$, souvent représenté par la droite des réels, $\mathbb{C}$ s'identifie souvent au **plan**. La partie réelle et la partie imaginaire correspondent alors aux coordonnées d'un point ou vecteur du plan.

Définition

- On associe à tout nombre complexe z le point du plan de coordonnées $(\text{Ré}(z), \text{Im}(z))$, ou le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \text{Ré}(z) \\ \text{Im}(z) \end{pmatrix}$.
- Réciproquement, à tout point $M(x, y)$ du plan (resp. vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$), on associe le nombre complexe $z = x + iy$. z est appelé **l'affixe** de M (resp. de $\overrightarrow{u}$), et on note parfois z_M ou $z_{\overrightarrow{u}}$.

Exemple

Dessin

Propriété

L'addition de deux complexes correspond à la somme des vecteurs qui leur sont associés.
Il en va de même pour la différence, et la multiplication par un nombre réel.
Ainsi, la multiplier un nombre complexe par un **réel** λ correspond à réaliser une homothétie de rapport λ.

3. Conjugué

Définition, représentation, propriétés.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On définit son **conjugué** comme étant le nombre complexe :

$$\overline{z} = a - ib$$

On a donc : $\begin{cases} \text{Ré}\,(\overline{z}) & = & \text{Ré}(z) \\ \text{Im}\,(\overline{z}) & = & -\text{Im}(z) \end{cases}$

Remarque.
- Géométriquement, la conjugaison correspond à une **symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses**.
  Dessin
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$, et $\overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$.

Exemple

Donner le conjugué de tous les nombres complexes du premier exemple de ce chapitre.

Proposition

La conjugaison complexe :

- est **involutive** : $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- est **linéaire** : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
- **passe au produit et au quotient** : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Proposition

Pour tout $z = a + ib$ complexe, on a :

- $z + \overline{z} = 2\text{Ré}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\text{Im}(z)$
- $z\overline{z} \in \mathbb{R}$

Démonstration.

- $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\text{Ré}(z)$
- $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\text{Im}(z)$
- $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$
  On encore : $\overline{z\overline{z}} = \overline{z}\overline{\overline{z}} = \overline{z}z = z\overline{z}$, donc on a bien $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

□

Méthode

Pour mettre sous forme algébrique un quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par **le conjugué du dénominateur**.

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{3-i}{2+5i} &= \frac{(3-i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{6-15i-2i+5i^2}{4-25i^2} \\ &= \frac{6-17i-5}{4+25} \\ &= \frac{1-17i}{29} = \frac{1}{29} + i\left(-\frac{17}{29}\right)\end{aligned}$$

4. Module

Définition

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit son **module**, noté $|z|$, par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque.

- On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| \in \mathbb{R}^+$, et $|z| = 0 \iff z = 0$.
- Le module d'un nombre réel correspond à sa valeur absolue, c'est pourquoi on utilise la même notation !
- À l'instar de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, le module d'un nombre complexe correspond à la distance du point d'affixe z à l'origine. De même, $|z - z'|$ correspond à la distance entre les deux points d'affixe respective z et z'.
- Le module correspond à la **norme du vecteur associé** !
  Dessins

Exemple

Calculer le module de tous les nombres complexes du premier exemple de ce chapitre.

Propriété

Le module complexe :

- passe à la multiplication et au quotient (et donc à la multiplication par un réel) : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $|zz'| = |z||z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- passe à la conjugaison : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$.
- vérifie : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = |z|^2$

⚠ Comme la valeur absolue, le module ne passe pas à l'addition ni à la soustraction !

Proposition

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: on a :

- **Inégalité triangulaire :** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
  avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ ou si $z' = 0$.
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
- $|\text{Ré}(z)| \leq |z|$ et $|\text{Im}(z)| \leq |z|$

⚠ Il n'existe pas d'**ordre** sur $\mathbb{C}$ qui prolongerait celui sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on ne doit jamais avoir de nombre complexe non réel seul dans une inégalité !

II Forme exponentielle

1. La notation $e^{i\theta}$

On remarque que dans le plan complexe, l'ensemble des nombres complexes de module 1 forme exactement le cercle centré en l'origine et de rayon 1 : le **cercle trigonométrique**.
On introduit dans cette partie une notation pour exprimer ces nombres complexes en fonction des angles associés sur le cercle trigonométrique.

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ le nombre complexe associé à l'image de θ sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le nombre obtenu à partir de 1 en faisant une rotation d'angle θ dans le sens direct (trigonométrique).
On note $\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi[\right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Exemple

a) $e^{i0} = 1$

b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

c) $e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$

d) $e^{\frac{19i\pi}{4}} = e^{\frac{3i\pi}{4}} = e^{\frac{-i\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) Donner trois forme exponentielles possibles pour $z = -1$

Propriété

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$

Moralité : on peut appliquer sans vergogne **toutes les propriétés de l'exponentielle !**

Application

On peut de la sorte retrouver toutes les formules trigonométriques !
Par exemple, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\cos(a+b) = \text{Ré}\left(e^{i(a+b)}\right)$.
Or $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b))$
$= \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b) + i\sin(a)\cos(b) + i^2\sin(a)\sin(b)$
$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i\left(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)\right)$.
D'où $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, et $\sin(a+b) = \text{Im}\left(e^{i(a+b)}\right) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.
De même, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = \text{Ré}\left((e^{ia})^2\right)$ où $(e^{ia})^2 = (\cos(a) + i\sin(a))^2 = \cos^2(a) + 2i\cos(a)\sin(a) + i^2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) + i\,2\cos(a)\sin(a)$.

Exercice 1. *Trouver de cette manière une formule pour* $\sin(3a)$.

Proposition (*Formule d'Euler*)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \textbf{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.
D'où : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$, et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$.
Reste à diviser par 2 la première égalité, et par $2i$ la seconde. □

Application

On peut retrouver les formules de linéarisation de $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$\cos^2(a) = \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{ia})^2 + 2e^{ia}e^{-ia} + (e^{-ia})^2}{4} = \frac{e^{2ia} + 2e^0 + 2e^{-2ia}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2ia} + 2^{-2ia}}{2} = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.
De même, $\sin^2(a) = \frac{e^{2ia} - 2e^{ia}e^{-ia} + e^{-2ia}}{4i^2} = \frac{-2}{-4} + \frac{1}{-2}\frac{e^{2ia}+e^{-2ia}}{2} = \frac{1-\cos(2a)}{2}$.

Exercice 2. *Trouver de même une formule pour* $\sin^3(a)$ *en fonction des* $\cos(ka)$ *et* $\sin(ka)$.

Proposition (*Angle moitié*)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$

Exercice 3. *À l'aide de la technique de l'angle moitié :*

1. *Obtenir une formule de* $\cos(a) + \cos(b)$ *sous forme factorisée.*
2. *Simplifier au maximum l'expression* $\frac{1-e^{i\theta}}{1-e^{-i\theta}}$, *pour* $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. *Obtenir une forme factorisée simplifiée de* $\frac{e^{in\theta} - e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}}$, *pour* $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *et* $n, p \in \mathbb{Z}$.

2. Argument et forme exponentielle

Pour pouvoir paramétrer de manière unique un point quelconque du plan, une alternative aux coordonnées cartésiennes (abscisse et ordonnée) est de donner sa distance à l'origine et l'angle qu'il forme par rapport à l'axe des abscisses. On appelle cela le système de **coordonnées polaires**.
Dans le plan complexe, la distance à l'origine correspond au module, et l'angle intervient dans la notation $e^{i\theta}$ (pour les nombres complexes de module 1 !).

Proposition

Soit z un complexe non nul. Alors il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel qu'on puisse écrire $z = re^{i\theta}$.

Démonstration. **Unicité :** Soit $(r, \theta), (r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tels que $z = re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$.

Alors $|z| = |r||e^i\theta| = r$, puisque $r > 0$, et de même $|z| = r'$. D'où $r = r'$.
Mais alors $re^{i\theta} = re^{i\theta'}$ avec $r \neq 0$, donc on obtient $e^{i\theta} = ei\theta'$. D'où $\theta \equiv \theta[2\pi]$.
Mais comme $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$, alors $\theta = \theta'$.

Autre méthode : $\frac{r}{r'} = \frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i\theta' - i\theta} = e^{i(\theta'-\theta)}$
Or $e^{i(\theta'-\theta)} \in \mathbb{U}$ et $\frac{r}{r'} \in \mathbb{R}_+^*$. Donc $\frac{r}{r'} = e^{i(\theta'-\theta)} = 1$.
Ainsi : $r = r'$ et $\theta = \theta'$.

D'où $(r, \theta) = (r', \theta')$. D'où l'unicité.

Existence : On pose $r = |z|$. Alors $r \neq 0$, et $\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} = \frac{r}{r} = 1$.

Ainsi, $\frac{z}{r} \in \mathbb{U}$, donc il existe un $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{z}{r} = e^{i\theta}$.
On a donc $z = re^{i\theta}$ comme voulu ! $\square$

Définition

Soit z un complexe non nul. On appelle **forme exponentielle** de z toute écriture de z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
r est unique, c'est le module de z.
θ est appelé **un argument** de z. Il y en a une infinité, tous congrus modulo 2π.
On appelle **argument principal** de z l'unique argument de z compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On le note $\arg(z)$.

Remarque. Soit (O, I, J) un repère orthonormé qu'on assimile au plan complexe. Alors O, I et J sont respectivement les points d'affixe 0, 1 et i.
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, M_z le point du plan d'affixe z et $\vec{u}_z$ le vecteur d'affixe z.
Alors un argument de z est une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{IOM_z}$, ou encore $\left(\overrightarrow{OI}, \vec{u}_z\right)$.

Propriété

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(\lambda z) = \arg(z)$
- $\arg(z) = \arg(z')[2\pi] \iff \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(z) = \arg(z')[\pi] \iff \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^*$
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) = \arg(z')[2\pi]$

⚠ Pas de formule pour $\arg(z + z')$ et $\arg(z - z')$!

Méthode (*Passer de la forme exponentielle à la forme algébrique et réciproquement*)

• Si on donne $z = re^{i\theta}$ sous forme exponentielle, alors on a :
$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r\cos(\theta) + i\ r\sin(\theta)$.
Ainsi : $\text{Ré}(z) = r\cos(\theta)$ et $\text{Im}(z) = r\sin(\theta)$.

• Si on donne $z = a + ib$ sous forme algébrique, alors on a :
$z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, et θ n'importe quel nombre réel qui vérifie $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$.

Exemple

• Mettons $4e^{\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme algébrique. On a :
$4e^{\frac{2i\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}$
• Mettons $-3 + 3i$ sous forme exponentielle.
$|-3 + 3i| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
On cherche donc θ tel que $\cos(\theta) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient. Ainsi : $-3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

III Équations du second degré à coefficients réels

Théorème

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation d'ordre 2 $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.
On cherche ses solutions dans $\mathbb{C}$, aussi appelées **racines** complexes du polynôme.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Si $\Delta > 0$, alors il existe deux racines, données par : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$. On peut alors écrire $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
2. Si $\Delta = 0$, il existe une unique racine, donnée par $x_0 = \dfrac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$. On peut alors écrire $ax^2+bx+c = a(x - x_0)^2$.
3. **Si** $Delta < 0$**, alors** il existe **deux racines complexes non réelles conjuguées**, données par : $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On peut alors écrire $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Or si $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = i^2 \times (-\Delta) = \Delta$. D'où, dans ce cas :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

□

IV Racines n-ième de l'unité et racines de nombres complexes

HP extrêmement classique

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^=$. Alors l'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions complexes, données par :
$\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{\omega^k \mid 0 \leq k < n\right\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Démonstration. On cherche les solutions complexes sous la forme $re^{i\theta}$. Pour tous $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on a :
$\left(re^{i\theta}\right)^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff r = 1$ et $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$.
Or $n\theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \theta \equiv 0\ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \dfrac{2ik\pi}{n}$.
Comme on cherche $\theta \in [0, 2\pi[$, on obtient bien n solutions distinctes données par les $k \in [\![0, n-1]\!]$. □

Remarque. Pour $n = 2$, on obtient 1 et $e^{i\pi} = -1$.
Pour $n = 3$, on obtient 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Pour $n = 4$, on obtient 1, $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}} = -i$.
En général, les solutions correspondent aux sommets du polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle trigonométrique et passant par le point d'affixe 1.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** toute solution complexe de l'équation $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On appelle **racine** n-ième de z tout nombre complexe r tel que $r^n = z$.
Alors z admet exactement n racines n-ièmes.
Si r_0 est une racine n-ième de z, alors l'ensemble des racines n-ièmes de z est donné par $\{r_0 \times u \mid u \in \mathbb{U}_n\} = \left\{r_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

Démonstration. L'existence se montre en passant par la forme exponentielle : Si on écrit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on sait que $r_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ convient.
Si on a trouvé **une** racine $r_0 \in \mathbb{C}$, alors $r_0 \neq 0$ et pour tout $r \in \mathbb{C}$, on a :
$r^n = z \iff r^n = r_0^n \iff \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n = 1 \iff \dfrac{r}{r_0} \in \mathbb{U}_n$. $\square$

Remarque. Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul forment toujours un polygone régulier à n sommets centré en l'origine.