Chapitre 6 – Sommes et produits

I Familles

Soit E et I deux ensembles.

Définition

On appelle **famille d'éléments de E indexée par I** toute application $a : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & a_i \end{array} \right.$

On note $(a_i)_{i \in I}$ une telle famille : on oublie très vite l'application pour y penser comme une collection d'objets paramétrée par des indices.
I est appelé l'ensemble d'indexation. L'indice $i \in I$ est une variable muette !
On dit que la famille est **finie** si l'ensemble d'indexation I est fini.

Remarque. On a vu que l'ensemble des applications de E dans F se notait F^E.
Ainsi, on note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I. On note alors $(a_i)_{i \in I} \in E^I$.

Exemple

- $(2^{1-i})_{i \in [\![3,10]\!]}$ est une famille de réels indexée par $I = [\![3, 10]\!]$. Elle correspond à une application $a : [\![3, 10]\!] \to \mathbb{R}$, qui vérifie par exemple $a_3 = \frac{1}{4}$ et $a_9 = \frac{1}{256}$. On note $(a_i)_{i \in [\![3,10]\!]} \in \mathbb{R}^{[\![3,10]\!]}$.
- Une suite de nombres réels est simplement une famille de réels indexée par les entiers naturels. L'ensemble des suites réelles est donc noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse à des familles finies de nombres (réels ou complexes), indexées par des entiers ou des couples d'entiers, et on considère leur somme ou leur produit.
On verra que ces notions se généralisent intuitivement aux familles de nombres indexées par un ensemble fini quelconque.

II Sommes

1. Notation Σ et généralités

Soient $n, p \in \mathbb{Z}$ et $(a_k)_{k \in [\![n,p]\!]}$ une famille de réels (ou de complexes) indexée par $[\![n, p]\!]$.

Notation

Si $n \leq p$, on note $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} a_k$ ou $\displaystyle\sum_{n \leq k \leq p} a_k$, ou encore $\displaystyle\sum_{k \in [\![n,p]\!]} a_k$ la somme $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{p-1} + a_p$.

Si $n > p$, l'ensemble d'indexation est vide, et on décide que la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} a_k$ est nulle (somme vide).

Remarque.
- Il y a $p - n + 1$ termes dans cette somme. Il est **crucial** de savoir compter le nombre de termes qui interviennent dans une somme !
- Lorsqu'on somme une quantité constante, (a_k est indépendant de l'indice k), alors la somme vaut le nombre de termes fois la constante.
- L'indice de sommation est une variable muette ! La valeur de la somme ne peut pas dépendre de cette variable... On a $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{i=n}^{p} a_i$

Exemple

- $\displaystyle\sum_{i=10}^{25} 2 = 2 \times (25 - 10 + 1) = 32$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c$

- Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels. Écrire avec le symbole Σ :

a) $3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 4a_4$
b) $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n}$
c) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$
d) $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}$
e) $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$
f) $a_0 - 2a_1 + 3a_2 - 4a_3 + 5a_4 - 6a_5$

Propriété (*Linéarité de* $\sum$)

Soit $n, p \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a_i), (b_i) \in \mathbb{R}^{[\![n,p]\!]}$. Alors :

- $\displaystyle\sum_{k=n}^{p}(a_k + b_k) = \sum_{k=n}^{p} a_k + \sum_{k=n}^{p} b_k$
- $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=n}^{p} a_k$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(4i-3) = \sum_{i=0}^{n} 4i - \sum_{i=0}^{n} 3 = 4\sum_{i=0}^{n} i - 3(n+1) = 4\frac{n(n+1)}{2} - 3(n+1) = (n+1)(2n-3).$

2. Changements d'indices

On peut **renuméroter** (réindexer) les termes que l'on somme comme cela nous arrange !

Méthode

- **Décalage d'indice** : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$. On a fait le changement d'indice $i = j+1$.
- **Symétrie** : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}$. On a utilisé $a_1 + \ldots + a_n = a_n + \ldots + a_1$, en réalisant le changement d'indice $i = n+1-j$.
- **Symétrie bis** : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}$ (idem, en faisant $i = n - j$.

Exemple

a) On veut calculer $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_n = n + \ldots + 1$ donc $2S_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$. D'où $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Formellement : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{n}(n+1-i) = \sum_{k=1}^{n}(r+1-k)$.

Donc $2S_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1)$.

b) Calculons $\displaystyle\sum_{i=6}^{15}(1-2i)$.

On a $\displaystyle\sum_{i=6}^{15}(1-2i) = \sum_{i=6}^{15} 1 - 2\sum_{i=6}^{15} i = 10 - 2\sum_{j=1}^{10}(j+5) = 10 - 2\sum_{j=1}^{10} j - 2\sum_{j=1}^{10} 5$

Par ce qui précède, la somme vaut donc $10 - 2\dfrac{10(10+1)}{2} - 2 \times 50 = 10 - 110 - 100 = -200$.

3. Regroupement par paquets

On peut découper des sommes en plusieurs bouts, en découpant l'ensemble d'indexation.

Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{[\![0,n]\!]}$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Exemple

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i = \sum_{\substack{1\leq i \leq 2n \\ i \text{ pair}}} (-1)^i i + \sum_{\substack{1\leq i \leq 2n \\ i \text{ impair}}} (-1)^i i = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k} 2k + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{2k+1}(2k+1)$$

$= \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n-1}(2k-(2k+1)) + 2n - 1 = (n-1)(-1) + 2n - 1 = n$

Autre méthode : changement d'indice à la fin pour se ramener à une seule somme, de 1.

4. Sommes à connaître absolument

Proposition

1. Pour tout $q \in \mathbb{C}$, et tous $n, p \in \mathbb{N}$, avec $n \leq p$:
   Si $q \neq 1$, alors : $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} q^k = \frac{q^n - q^{p+1}}{1-q}$.
   En particulier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
3. **Sommes télescopiques :** Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \leq p$:
   $\displaystyle\sum_{k=n}^{p}(u_{k+1} - u_k) = u_{p+1} - u_n$

Démonstration.

- Soit $S = \displaystyle\sum_{k=n}^{p} q^k$. Alors $qS = \displaystyle\sum_{k=n}^{p} q^{k+1} = \sum_{l=n+1}^{p+1} q^l = \sum_{k=n}^{p} q^k - q^n + q^{p+1}$
  On a $qS = S - q^n + q^{p+1}$, donc $(q-1)S = q^n - q^{p+1}$. Si $q \neq 1$, il reste à diviser par $q-1$.
- Ces formules se démontrent par récurrence. Les deux premières étaient dans le TD0 !
- $\displaystyle\sum_{k=n}^{p}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{p} u_{k+1} - \sum_{k=n}^{p} u_k = \sum_{k=n+1}^{p+1} u_k - \sum_{k=n}^{p} u_k = u_{p+1} + \sum_{k=n+1}^{p} u_k - \sum_{k=n+1}^{p} u_k - u_n = u_{p+1} - u_n$.

□

Exercice 1.

1. *Calculer la somme des* 9 *premiers cubes entiers non nuls.*
2. *Calculer la somme des* 50 *premiers termes de la suite géométrique de premier terme* 3 *et de raison* -2.
3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Simplifier la somme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$. *On l'écrira sous la forme d'une somme télescopique.*
4. *Calculer la somme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(k)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

III Produits

1. Généralités

Soient $n, p \in \mathbb{Z}$ et $(a_k)_{k \in [\![n,p]\!]}$ une famille de réels (ou de complexes) indexée par $[\![n,p]\!]$.

Notation

Si $n \leq p$, on note $\prod_{k=n}^{p} a_k$ ou $\prod_{n \leq k \leq p} a_k$, ou encore $\prod_{k \in [\![n,p]\!]} a_k$ le produit $a_n \times a_{n+1} \times \ldots \times a_{p-1} \times a_p$.

Si $n > p$, l'ensemble d'indexation est vide, et on décide que le produit $\sum_{k=n}^{p} a_k$ vaut 1. (⚠)

Remarque. • Lorsqu'on multiplie une quantité constante, (a_k est indépendant de l'indice k), alors le produit vaut la constante puissance le nombre de termes.

• L'indice de multiplication est une variable muette !

Exemple

a) $\prod_{i=10}^{25} 2 = 2^{25-10+1} = 2^{16}$

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$: $\prod_{k=0}^{n} c = c^{n+1}$

Propriété (*Multiplicativité de* $\prod$)

Soit $n, p \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$ et $(a_i), (b_i) \in \mathbb{R}^{[\![n,p]\!]}$. Alors :

- $\prod_{k=n}^{p} (a_k b_k) = \prod_{k=n}^{p} a_k \prod_{k=n}^{p} b_k$
- $\prod_{k=n}^{p} a_k^s = \left(\prod_{k=n}^{p} a_k \right)^s$
- ⚠ $\prod_{k=n}^{p} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=n}^{p} a_k$

2. Manipulation

On peut faire avec les produits tout ce qu'on pouvait faire avec les sommes : changements d'indices, découpage par paquets, produits doubles interversion de produits doubles, etc.

3. Factorielle

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit **la factorielle de** n, noté $n!$, comme étant le produit :

$$n! = \prod_{k=i}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

En particulier : $0! = 1$ (produit vide), $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, etc.

IV Formule du binôme et applications

1. Coefficients binomiaux

Définition

Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on définit « k **parmi** n », noté $\binom{n}{k}$, comme étant le nombre de manière de choisir k éléments d'un ensemble à n éléments.
On a donc $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, et si $k \geq n$, alors $\binom{n}{k} = 0$ (on ne peut pas choisir plus d'éléments qu'il y en a dans l'ensemble).

On a en fait $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!}$, et si $k \in [\![0, n]\!]$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Remarque. Par convention, on définit aussi $\binom{n}{k}$ pour $k < 0$, en posant $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple

1. Il y a $\binom{44}{2}$ manières de choisir deux élèves dans la classe pour être délégués.
   Ce nombre vaut $\dfrac{44 \times 43}{2} = 22 \times 43 = 2 \times 473 = 946$.
2. $\displaystyle\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$.
3. $\displaystyle\binom{12}{4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{24} = 11 \times 5 \times 9 = 495$.

Proposition

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a :

- $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\displaystyle\binom{n}{1} = 1$
- $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
- $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- **Formule de Pascal :** $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
- **Truc du chef :** $\displaystyle k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, c'est-à-dire $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Démonstration. Idées combinatoires pour la somme, la formule de Pascal et le truc du Chef.
Preuve calculatoire de la Formule de Pascal, en mettant au même dénominateur le terme de droite.
Preuve calculatoire du truc du chef. □

Exercice 2. *Montrer que pour tous $n, k, j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq k \leq n$, on a* $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

Solution : *Soient $n, k, j \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq j \leq k \leq n$.*
Alors $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!}$.
D'autre part : $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(n-k)!(n-j-n+k)!} = \frac{n!}{j!(n-k)!(k-j)!}$. *On a bien égalité entre les deux membres.*

Triangle de Pascal : Dessin

2. La formule du binôme

Calculons ! $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$. On voit apparaître à chaque fois les coefficients de la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Théorème

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété P_n : "$\forall a, b \in \mathbb{C}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ est vraie.
Initialisation ($n=0$) : Soient $a, b \in \mathbb{C}$. $(a+b)^0 = 1$. D'autre part : la somme contient un seul terme, pour $k=n=0$, et vaut donc $\binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$. On a bien l'égalité.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que P_n est vrai. Montrons que P_{n+1} est vraie aussi. Soient $a, b \in \mathbb{C}$.
Par HR, on a $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
Ainsi :
$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité, et donc le théorème. □

Exemple

1. $(a+b)^7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^k b^{7-k}$. On fait un rapide triangle de Pascal pour obtenir les coefficients, et on obtient :
$(a+b)^7 = b^7 + 7ab^6 + 21a^2b^5 + 35a^3b^4 + 35a^4b^3 + 21a^5b^2 + 7a^6b + a^7$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2^n = (1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$

Exercice 3. *Développer directement $(a-b)^9$ pour $a, b \in \mathbb{C}$ quelconques.*

3. Applications en trigonométrie

On a vu dans le chapitre précédent qu'on pouvait utiliser la formule d'Euler pour **linéariser** une expression sous la forme $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$. L'objectif est d'obtenir à la place une somme de termes de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$, ce qui est très utile par exemple pour obtenir une primitive.

On peut désormais réaliser la linéarisation très efficacement !

Exemple

Linéarisons $\cos^5(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
\cos^5(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 &= \frac{1}{2^5}(e^{ix}+e^{-ix})^5 \\
&= \frac{1}{32}\left((e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4e^{-ix} + 10(e^{ix})^3(e^{-ix})^2 + 10(e^{ix})^2(e^{-ix})^3 + 5e^{ix}(e^{-ix})^4 + (e^{-ix})^5\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + 5e^{4ix-ix} + 10e^{3ix-2ix} + 10e^{2ix-3ix} + 5e^{ix-4ix} + e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-5ix} + 5e^{3ix} + 5e^{-3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(2\cos(5x) + 10\cos(3x) + 20\cos(x)\right) \\
&= \frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)
\end{aligned}$$

C'est moins utile en pratique mais extrêmement classique : on peut aussi **délinéariser** une expression de la forme $\cos(nx)$ pour l'écrire pour la forme d'une somme de puissances de cosinus et de sinus. On utilise cette fois-ci la formule de Moivre : $\cos(nx) = \text{Ré}\left((e^{ix})^n\right) = \text{Ré}\left((\cos(x)+i\sin(x))^n\right)$.

Exemple

$$\begin{aligned}
(\cos(x)+i\sin(x))^6 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{6}{k}\cos^{8-k}(x)i^k\sin^k(x) \\
&= \cos^6(x) + 6\cos^5(x)i\sin(x) + 15\cos^4(x)i^2\sin^2(x) + 20\cos^3(x)i^3\sin^3(x) \\
&\quad + 15\cos^2(x)i^4\sin^4(x) + 6\cos(x)i^5\sin^5(x) + i^6\sin^6(x) \\
&= \cos^6(x) + 6i\cos^5(x)\sin(x) - 15\cos^4(x)\sin^2(x) + -20i\cos^3(x)\sin^3(x) \\
&\quad + 15\cos^2(x)\sin^4(x) + 6i\cos(x)\sin^5(x) - \sin^6(x)
\end{aligned}$$

Avec la partie réelle, on obtient : $\cos(6x) = \cos^6(x) - 15\cos^4(x)\sin^2(x) + 15\cos^2(x)\sin^2(x) - \sin^6(x)$.
NB : on pourrait réécrire uniquement à l'aide de $\cos(x)$ en remplaçant tous les $\sin^2(x)$ par $1-\cos^2(x)$.

Cette méthode est générale !

Exercice 4. 1. *Linéariser* $\sin^4(x)$ *et* $\cos^8(x)$
2. *Délinéariser* $\cos(5x)$ *et* $\sin(3x)$

V Sommes doubles

1. Découpons des rectangles

On s'intéresse dans la suite aux sommes dites doubles, c'est à dire aux sommes de nombres indexés par des couples d'entiers : l'exemple le plus commun est $I = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. On fixe $n, p \in \mathbb{N}$.
Faire des DESSINS.

Le rectangle $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ contient np points.
On peut grouper ces points par colonnes (n colonnes de p points chacune), ou bien par lignes (p lignes de n points chacune).

Le carré $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] = [\![1,n]\!]^2$ contient n^2 points.
En plus des lignes et colonnes, on peut s'intéresser à la diagonale et aux triangles en-dessous et au-dessus de la diagonale.

- La diagonale contient n points ($i = j$).
- Le triangle inférieur est l'ensemble des (i,j) tels que $1 \leq j \leq i \leq n$.
  Il contient $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$ points.
- Le triangle inférieur strict est l'ensemble des (i,j) tels que $1 \leq j < i \leq n$.
  Il contient $\dfrac{n^2+n}{2} - n = \dfrac{n^2-n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ points.
- Il en va de même pour le triangle supérieur et le triangle supérieur strict par symétrie.

2. Sommes doubles

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres (réels ou complexes), avec $n, p \in \mathbb{N}$.
On écrit aussi cette famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, et lorsque $n = p$: $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
Alors la somme des termes de cette famille se note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$, ou encore $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$.

Dans le cas $n = p$ (cas du carré), on note souvent $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$ la somme de tous les termes.
On peut sommer uniquement les termes d'indice (i,j) qui vérifient $i \leq j$, c'est-à-dire dans le triangle inférieur. On écrit alors $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$. Et de même pour le triangle inférieur strict et les triangles supérieurs.
Et pour la diagonale : $\displaystyle\sum_{1\leq i=j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Les mêmes principes que pour les sommes simples s'appliquent : on peut renuméroter les termes, et découper la somme par paquets. On utilise très régulièrement les découpages vus au paragraphe précédents. Ainsi, on a par exemple :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) \text{ (découpage en colonnes ou en lignes)}$$

Et dans le cas du triangle inférieur par exemple :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right)$$

⚠ Il faut être **extrêmement attentif** aux bornes des indices !

Exemple

Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(i+j)$ (lignes ou colonnes)

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{x^i}{x^j}$ (méthode directe)

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$ (interversion)

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}x^j$ (interversion)