Chapitre 7 – Systèmes linéaires

I Vocabulaire

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

Définition

On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** tout système d'équations de la forme

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où :

- $x_1, \dots, x_p$ sont les **inconnues** du système
- $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est la famille des coefficients du système
- le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système
- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note L_i la i-ième ligne du système, ie la i-ème équation.

Remarque. En pratique, on résout des systèmes à 2, 3 ou 4 inconnues. On appelle alors les inconnues x, y, z, t plutôt que x_1, x_2, x_3, x_4.

Exemple

Dans chaque cas, donner le nombre d'inconnues et d'équations, ainsi que le second membre.

a) $(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 4 \\ -x & + & y & = & 1 \end{array} \right.$

b) $(\mathcal{S}_2) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & - & z & = & 6 \\ & & y & + & 6z & = & 1 \end{array} \right.$

c) $(\mathcal{S}_3) \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 3y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$

d) $(\mathcal{S}_4) \left\{ \begin{array}{ccccc} -x & + & 3y & = & 6 \\ 2x & + & y & = & 1 \\ x & + & 5y & = & -2 \\ & & 3 & = & 1 \end{array} \right.$

Définition

- Une **solution** du système linéaire $(\mathcal{S})$ est un p-uplet de réels $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ pour lequel les n équations du système sont simultanément vérifiées.
- Résoudre un système, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.
- Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemple

- $(\mathcal{S}_4)$ n'a aucune solution puisque sa ligne L_4 n'est jamais vérifiée. L'ensemble des solutions est $\varnothing$.
- On a appris au lycée à résoudre $(\mathcal{S}_1)$, par substitution ou par combinaison.
  Par exemple par combinaison, je fais $L_1 + 2L_2$ et j'obtiens $5y = 6$ donc $y = \dfrac{6}{5}$. Puis $x = y - 1 = \dfrac{1}{5}$.
  Il y a donc une unique solution : le couple $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.
- On peut résoudre $(\mathcal{S}_3)$ par substitution : $y = 0$, donc $2x + 5z = 0$, et ainsi $x = \dfrac{-5}{2}z$. Il y a donc une infinité de solutions, en fonction de la valeur de z choisie !

Définition

- On dit qu'un système est **compatible** lorsqu'il admet au moins une solution.
- Sinon, il est dit **incompatible**.
- Un système est dit **de Cramer** lorsqu'il a autant d'équation que d'inconnue (système carré), et qu'il admet **une unique solution**.

Exemple

$(\mathcal{S}_4)$ est incompatible.
$(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_3)$ sont compatibles et carrés, mais seul $(\mathcal{S}_1)$ est de Cramer.
Le système suivant est-il compatible ? $(\mathcal{S}_5)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & y & & & = & 5 \end{array}\right.$

Définition

On appelle **système homogène** tout système linéaire dont le second membre est nul : $\forall i \in [\![1,n]\!], b_i = 0$.
Si $(\mathcal{S})$ est un système linéaire, on appelle **système homogène associé à** $(\mathcal{S})$ le système obtenu à partir de $(\mathcal{S})$ en remplaçant tous les b_i par 0. On le note $(\mathcal{S}_0)$ où $(\mathcal{S}_H)$.

Exemple

- $(\mathcal{S}_3)$ est un système homogène. Les autres exemples vus jusqu'ici ne sont pas homogènes.
- Le système homogène associé à $(\mathcal{S}_1)$ est le système : $(\mathcal{S}_{1H})\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$
- Donner les systèmes homogènes associés à $(\mathcal{S}_2)$, $(\mathcal{S}_4)$ et $(\mathcal{S}_5)$.

Remarque. Les systèmes homogènes sont tous **compatibles**, puisque $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^p$ est nécessairement solution.
En fait, l'ensemble des solutions d'un système homogène a une structure forte, qu'on étudiera plus tard dans l'année. Par exemple, on peut additionner deux solutions et on obtiendra une nouvelle solution !

Proposition

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire compatible, $(y_i)_{1\leq i\leq p}$ une solution particulière de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}_H)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$.
Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est exactement :

$$\{(y_i + x_i)_{1\leq i\leq p} \mid (x_i)_{1\leq i\leq p} \text{ solution de } (\mathcal{S}_H)\}$$

Autrement dit, toutes les solutions de $(\mathcal{S})$ s'obtiennent comme somme de la solution particulière et d'une solution de $(\mathcal{S}_H)$.

La suite de ce chapitre vise à apprendre une méthode générale pour résoudre n'importe quel système linéaire. On a vu qu'il n'est pas judicieux de raisonner par implications, parce qu'on peut faire apparaître des "fausses solutions" dans le processus.
Il faut donc raisonner par équivalences : nous allons trouver des "opérations élémentaires" qui transforment un système en un système équivalent, et qu'on peut toujours utiliser pour se ramener à un système plus simple, qu'on sait résoudre.
Les systèmes auxquels on se ramène sont appelés les **systèmes échelonnés**.

II Systèmes échelonnés

1. Systèmes triangulaires

Exemple

Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}_6)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ & & y & + & 2z & + & 3t & = & 2 \\ & & & & z & + & 2t & = & 3 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array}\right.$$

Définition

Le système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit **triangulaire** lorsque $p = n$ et :

- $\forall 1 \leq j < i \leq n, a_{i,j} = 0$: *Les coefficients sous la diagonale sont tous nuls.*
- $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} \neq 0$: *Les coefficients diagonaux sont non nuls.* Ils sont appelés les **pivots** du système.

Méthode

Pour résoudre un système triangulaire, on trouve successivement la valeur de toutes les inconnues, du bas vers le haut.

2. Systèmes échelonnés

Définition

Le système linéaire $(\mathcal{S})$ est dit **échelonné** lorsque pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$:

- Si les k *premiers* coefficients de la ligne i sont nuls, avec $k < p$, alors les $k+1$ premiers coefficients de la ligne $i+1$ sont nuls.
- Si tous les coefficients de la ligne i sont nuls, alors c'est le cas pour toutes les lignes suivantes.

Dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul est appelé le **pivot**, et l'inconnue associée est appelée une **inconnue principale**. Les inconnues non principales sont dites **secondaires**.

Exemple

- De tous les systèmes vus jusqu'ici, seuls $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_6)$ sont échelonnés.
- Un système triangulaire est toujours échelonné, et toutes les inconnues sont des inconnues principales.
- Pour chacun des systèmes suivants, encadrer les pivots et donner les inconnues principales et secondaires.

$$(\mathcal{S}_7)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ & & y & & & + & t & & & = & 2 \\ & & & & 2z & & & + & 3w & = & 6 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_8)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ & & & & z & - & t & & & = & 6 \\ & & & & & & 2t & + & w & = & 8 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & & & 0 & = & 9 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_9)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a & - & b & + & 2c & - & 3d & + & e & = & 0 \\ & & 2b & + & 4c & + & d & - & 5e & = & 3 \\ & & & & & & 2d & + & 3e & = & -1 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}_{10})\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & \alpha \\ & & 3y & - & 4z & = & \beta \\ & & & & 5z & = & \gamma \end{array}\right.$$

- Résoudre les système $(\mathcal{S}_8)$ et $(\mathcal{S}_{10})$. Idée pour résoudre $(\mathcal{S}_7)$?

Remarque. Quitte à réordonner les inconnues ($x_i \leftrightarrow x_j$), un système échelonné est de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{cccccccccccc}
\boxed{a_{1,1}}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,r}x_r & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{2,2}}x_2 & + & \dots & + & a_{2,r}x_r & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & \boxed{a_{r,r}}x_r & + & \dots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

Exemple

mettre $(\mathcal{S}_8)$ sous la forme précédente.

Définition

On appelle **rang d'un système échelonné** le nombre d'équations non triviales de ce système.
Il s'agit aussi du nombre de pivots, et du nombre d'inconnues principales.
Il est donc inférieur ou égal à n et inférieur ou égal à p.

Exemple

Tous les systèmes échelonnés vus précédemment sont de rang 3.

Proposition

Si deux systèmes échelonnés sont équivalents, alors ils ont le même rang.

3. Résolution

Théorème

Soit $(\mathcal{S})$ un système échelonné à n équations et p inconnues, et r son rang. Alors :

- Si $(\mathcal{S})$ comporte au moins une équation de type $0 = b_k$ avec $b_k \neq 0$, alors il est incompatible.
- S'il ne comporte pas d'équation de ce type (mais il peut comporter des équations du type $0 = 0$), alors il est compatible, et deux cas se présentent :
  1. Si $r = p$, c'est-à-dire si toutes les inconnues sont principales, alors le système $(\mathcal{S})$ admet une unique solution, obtenue en ignorant les équations du type $0 = 0$ et en résolvant le système triangulaire restant.
  2. Si $r < p$, c'est-à-dire s'il existe des inconnues secondaires, alors le système $(\mathcal{S})$ admet une infinité de solutions. Pour le résoudre :
     On passe en second membre les $p - r$ inconnues secondaires qui deviennent des *paramètres*.
     On obtient un système triangulaire que l'on sait résoudre. L'ensemble des solutions est ainsi paramétré par les $p - r$ inconnues secondaires. On dit qu'il y a $p - r$ *degrés de liberté*.

Remarque. Les sytèmes échelonnés qui vérifient $r = n = p$ sont de Cramer.

Méthode

- Reconnaître un système échelonné.
- Identifier les inconnues principales et secondaires, calculer le rang.
- Déterminer le nombre des solutions du système (0, 1 ou une infinité).
- Passer les inconnues secondaires au second membre, pour jouer le rôle de paramètres.
- Résoudre comme un système triangulaire en remontant les calculs de bas en haut.

Exemple

Résoudre $(\mathcal{S}_7)$ et $(\mathcal{S}_9)$.

III Résolution par le Pivot de Gauss

1. Opérations élémentaires

Définition

On appelle **opérations élémentaires** sur un système linéaire les opérations suivantes :

- **Permutations :** Échanger deux colonnes (c'est-à-dire réordonner les inconnues), ou deux lignes. On note $C_i \leftrightarrow C_j$ ou $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **Dilatations :** Multiplier une ligne L_i par un scalaire λ non nul. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$
- **Transvections :** Ajouter à une ligne L_i un multiple quelconque d'une autre ligne L_j. On note $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$, où $\mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j$.

Proposition

Une opération élémentaire appliquée à un système $(\mathcal{S})$ le transforme en un système $(\mathcal{S}_2)$ qui lui est **équivalent**.

Remarque.

- Il est important de toujours transformer le système en un système **équivalent** pour obtenir réellement l'ensemble des solutions à la fin du raisonnement, sans en oublier ni faire apparaître de « fausses solutions ». Ainsi, on s'évertuera à n'utiliser **que les opérations élémentaires** !
- On peut réaliser simultanément plusieurs opérations élémentaires si elles n'entrent pas en conflit les unes avec les autres. Par exemple, on peut choisir une ligne pivot qu'on ne modifie pas et réaliser des transvections à plusieurs autres lignes simultanément à partir de cette ligne pivot.

Exemple

Résoudre le système suivant : $(\mathcal{S}_{11}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & + & 5y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$

2. L'algorithme du Pivot de Gauss

L'algorithme du Pivot de Gauss est un algorithme qui, à partir d'un système linéaire quelconque, décrit quelles opérations élémentaires effectuées pour le transformer en un système échelonné.
En suivant cet algorithme, on pourra donc toujours se ramener à un système échelonné, puis le résoudre comme on a appris à le faire.

Description de l'algorithme :

- Si le système est échelonné, on ne fait rien.
- Sinon :
  1. On considère la première colonne qui ne contient pas que des zéros
  2. On s'assure que le premier coefficient de cette colonne est non nul, en **permutant** deux lignes si nécessaire. Ce coefficient non nul devient le **pivot**.
  3. On réalise des **transvections** à partir du pivot, pour annuler tous les autres coefficients de la colonne.
  4. On recommence l'algorithme en ne considérant plus que les lignes suivantes du système (on oublie la ligne pivot).

Exemple

Résoudre le système $(\mathcal{S}_{11})$ en appliquant scrupuleusement l'algorithme du pivot de Gauss.

Remarque. On a intérêt à avoir un pivot très simple, par exemple 1 ou -1. Pour cela, il peut être intéressant d'utiliser une dilatation sur la ligne du pivot, ou de changer de pivot en permutant des lignes ou des colonnes du système.

Définition

On appelle **rang d'un système linéaire** le rang d'un système échelonné qui lui est équivalent.

Proposition

Si deux systèmes sont équivalents, alors ils ont le même rang.

Remarque. Il y a de multiples manières de choisir les opérations élémentaires pour se ramener à un système échelonné : tout le monde n'aura pas nécessairement le même résultat ! Par contre, ils auront tous le même rang et le même ensemble de solutions.

Exemple

Donner le rang et déterminer l'ensemble de solutions des systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_{12})\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_{13})\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

Exemple

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système suivant est-il de Cramer ? On prendra garde à ne pas réaliser d'opérations illicites.

$$(\mathcal{S}_\lambda)\left\{\begin{array}{rcrcl} (4-\lambda)x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

On permute les deux lignes, puis on réalise le pivot de Gauss, et on obtient le système échelonné équivalent suivant :

$$(\mathcal{S}_\lambda) \equiv \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & (1-\lambda)y & = & 0 \\ & & \left(-1-\frac{1}{2}(1-\lambda)(4-\lambda)\right)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc $(\mathcal{S}_\lambda)$ est de Cramer si et seulement si le coefficient de la deuxième ligne devant y ne s'annule pas.
Or ce coefficient se simplifie en $-\frac{1}{2}\left(\lambda^2-5\lambda+6\right) = -\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3)$.
D'où : le système est de Cramer si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}$.