Chapitre 8 – Suites usuelles réelles

I Généralités sur les suites

On a déjà vu que les suites réelles sont des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
Parfois, les suites sont indexées à partir d'un rang n_0 différent de 0, auquel cas on note $(u_n)_{n\geq n_0}$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le vocabulaire des applications réelles s'applique aussi aux suites : on pourra parler de suite majorée, minorée, bornée, (strictement) croissante, décroissante, monotone, etc.
Par exemple, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$.

Proposition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si et seulement si : $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$. Et de même en changeant les signes d'inégalité pour "décroissante", "strictement croissante" et "strictement décroissante".

Démonstration. Supposons $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante. Alors pour tout $n \geq n_0$, comme $n+1 \geq n$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
Réciproquement, supposons que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$. Montrons qu'alors la suite est croissante. Soient $p, q \geq n_0$ avec $p \leq q$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{p+n} \geq u_p$.
En effet, c'est vrai pour $n = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{p+n+1} \geq u_{p+n}$, donc la propriété est bien héréditaire.
En particulier, on a donc $u_q \geq u_p$. D'où la croissance. $\square$

Remarque. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est à termes *strictement positifs*, alors on a :
u_n est croissante $\equiv \forall n \geq n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Les opérations sur les applications réelles sont bien sûr en particulier valables pour les suites. Ainsi, si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pourra définir la suite $u+v : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n + v_n \end{array}\right.$, et de même les suites $u \cdot v$, λu et, si v ne s'annule pas, $\dfrac{u}{v}$.

Il y a de multiples manières de définir des suites. Les plus courantes sont :

- **Par une expression explicite**, appelée *terme général de la suite*, de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction. Certaines propriétés de la fonction se transmettent alors à la suite (monotonie, majoration). Par exemple $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, qui est strictement décroissante, bornée et tend vers 0.
- **Par récurrence**, en donnant un ou plusieurs termes initiaux et une *relation de récurrence* de la forme $u_{n+1} = f(n, u_n)$. Par exemple : $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_n + n + 1$.
- **De manière implicite**, souvent comme des solutions d'équations. Par exemple, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n + x - 1$ admet une unique solution strictement positive. On peut noter x_n cette solution, et obtenir ainsi une suite. On peut calculer explicitement x_0, x_1, et x_2, mais on ne sera pas capable de le faire pour les autres termes. Et pourtant, on peut dire beaucoup de choses sur cette suite !

II Suites arithmétiques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel $r \in \mathbb{R}$, appelé la **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$

b) $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r$

L'expression explicite permet aisément de calculer la somme de termes consécutifs, et on a :
$\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n : \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$.

- Si $r = 0$, alors la suite est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.
- Si $r > 0$, alors la suite est strictement décroissante et diverge vers $-\infty$.

Remarque. Les formes explicites se démontrent par récurrence.

III Suites géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel $q \in \mathbb{R}$, appelé la **raison**, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$$

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$

b) $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p \times q^{n-p}$

L'expression explicite permet aisément de calculer la somme de termes consécutifs, et on a :
$\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n : \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 \times \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$. Les propriétés de monotonie et convergence se déduisent directement du premier terme et de la raison.

IV Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque. Si $a = 1$, on obtient une suite arithmétique. Si $b = 0$, on obtient une suite géométrique.
⚠ Les coefficients a et b sont des constantes, qui ne peuvent pas dépendre de n !

Méthode (*Pour obtenir le terme général*)

Si $a \neq 1$.

1. On détermine le réel $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie $l = al + b$
2. On vérifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a.
   En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - l = (au_n + b) - (al + b) = a(u_n - l) = av_n$.
3. On en déduit le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On revient à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de $u_n = v_n + l$.

Exemple

Une population de grands singes est en voie d'extinction : en 2014, dans une réserve naturelle, on ne comptait plus que 5000 individus. On a alors mis en place un programme de soutien pour augmenter les naissances. On estime que chaque année depuis, un quart des singes disparaît et 400 naissances ont lieu. Combien de singes y aura-t-il en 2100 ?

Exemple

Soit u_n définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3}$. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

V Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Pour la suite, on se fixe $a, b \in \mathbb{R}$ et on tente de déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Remarquons déjà que la suite constante égale à 0 convient.
De plus, si une suite u convient, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite λu convient. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lambda u_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) = a(\lambda u_{n+1}) + b(\lambda u_n)$.
Enfin, si les suites u et v conviennent toutes les deux, alors la suite $u + v$ convient encore. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} + v_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + av_{n+1} + bv_n = a(u_{n+1} + v_{n+1}) + b(u_n + v_n)$.

L'ensemble des suites convenables est donc **stable par addition et par multiplication par une constante**, et il **contient la suite nulle**. On verra que ça en fait un *espace vectoriel*.

Cherchons désormais des solutions sous la forme de suites géométriques. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On peut supposer $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ (suite constante...). Alors :

$$\begin{aligned} u_n \text{ convient } &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_0 q^{n+2} = au_0 q^{n+1} + bu_0 q^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, q^2 = aq + b \\ &\iff q \text{ est solution de l'équation : } x^2 - ax - b = 0 \end{aligned}$$

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, vérifiant pour tout entier n la relation $u_{n+2} a u_{n+1} + b u_n$.
Soit $(E_c) : x^2 - ax - b = 0$, appelée l'**équation caractéristique**, et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, on note q_1 et q_2 les deux solutions réelles distinctes de (E_c). Alors : il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$
- Si $\Delta = 0$, on note q_0 l'unique solution (double) de (E_c). Alors : il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)\, q_0^n$$
- Si $\Delta < 0$, on note $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = \overline{z_1} = re^{-i\theta}$ les deux solutions complexes (non réelles) conjuguées de (E_c), sous forme **exponentielle**, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)$$

Méthode

1. Reconnaître une suite récurrente linéaire d'ordre 2, donnée par une relation de récurrence et ses deux premiers termes.
2. Introduire son équation caractéristique (E_c).
3. Résoudre (E_c) à l'aide du discriminant.
4. Si les solutions sont complexes non réelles, les mettre sous forme exponentielle.
5. Donner la forme de u_n, avec deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ encore indéterminées.
6. Déterminer la valeur de λ et μ à l'aide des deux premiers termes de la suite (conditions initiales), qui nous donnent un système linéaire de 2 équations d'inconnues λ et μ.
7. Conclure.

Exemple

Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ le terme général des suites définies par :

1. $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$
2. $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
3. $u_0 = -2$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exemple

On rappelle que la suite de *Fibonacci* est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Déterminer une expression de F_n en fonction de n.