Chapitre 9 – Calculs de primitives et d'intégrales

I Notion de primitives

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On appelle *primitive* de f toute application $F : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I, qui vérifie :
$$F' = f$$

Exemple

- Avec $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = x^3 + 2\sqrt{x}$, on a $u'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

  Ainsi, u est une primitive de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$
- Si f est la fonction nulle sur I, alors toutes les fonctions constantes sur E sont des primitives de f sur I.
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est une primitive de f' sur I.
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de primitives ! C'est par exemple le cas de la fonction partie entière.

Proposition

Soit $f : I \subset \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et F une primitive de f. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est :
$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration. On procède par double inclusion.

- D'une part, soit $G = F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. G est dérivable sur I par somme, et $G' = F' + c' = f + = f$. Ainsi, G est bien une primitive de f sur I.
- D'autre part, soit G une primitive de f sur I. Alors $(G - F)$ est dérivable sur I par somme, et sa dérivée vaut $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.
  Ainsi, $(G - F)$ est constante sur I. En notant $c \in \mathbb{R}$ la constante associée, on a bien $G = F + c$.

□

Remarque. Ce résultat n'est vrai que si f est définie sur un *intervalle*.
Une fonction qui admet une primitive en admet donc une infinité. On ne dira donc pas « *la* primitive de f », mais « *une* primitive de f ».

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur un *intervalle* I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une unique primitive de f sur I qui prenne la valeur y_0 au point x_0.

Démonstration. Selon le théorème, f admet une primitive F sur I. Alors l'application $G = F + (y_0 - F(x_0))$ est encore une primitive de f sur I, et on a $G(x_0) = F(x_0) + y_0 - F(x_0) = y_0$. $\square$

Exemple

- *Une* primitive de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.
- *L'unique* primitive de f qui s'annule en 1 est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{2}$.
- Déterminer l'unique primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ qui prenne la valeur -2 en 0.
- Déterminer l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui prenne la valeur 3 en 3.

Proposition (*Linéarité*)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- La fonction λF est une primitive de λf sur I.

Démonstration. C'est une conséquence de la linéarité de la dérivation. $\square$

Exemple

À l'aide de l'exemple précédent, on peut déjà déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{3}{x} - 5e^x$, en prenant : $x \mapsto 3\ln(x) - 5e^x$.
Ainsi, l'ensemble des primitives de u est constitué des fonctions $x \mapsto 3\ln(x) - 5e^x + c$ pour $c \in \mathbb{R}$.
De même, l'unique primitive de u sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1 est donnée par $x \mapsto 3\ln(x) - 5e^x + 5e$.

Remarque.

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On dit que $\lambda f + \mu g$ est une **combinaison linéaire** de f et g. La proposition se réécrit : $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.
- Si on connaît les primitives des fonctions usuelles, on peut donc déterminer aisément les primitives de toutes les fonctions s'exprimant comme **combinaison linéaire** des fonctions usuelles.
- ⚠ Aucune formule ne permet de déterminer simplement une primitive de fg ou $\dfrac{f}{g}$ à partir de primitives connues de f et g !

II Primitives usuelles

Il faut absolument connaître les primitives des fonctions usuelles ci-dessous. Dans ce tableau, pour chaque fonction f, on donne *une* primitive F de f sur l'intervalle I précisé. Pour les fonctions ci-dessous, I est en fait n'importe quel **intervalle** inclus dans le domaine de définition.

$f(x)$	$F(x)$	I
$\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	λx	$\mathbb{R}$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$I \subset \mathcal{D}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x (a \in \mathbb{R}_+^*)$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\left]\dfrac{-\pi}{2}+2k\pi\ ,\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ ou $\tan^2(x)+1$	$\tan(x)$	$\left]\dfrac{-\pi}{2}+2k\pi\ ,\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$

Il faut également savoir **reconnaître les dérivées des composées classiques** pour obtenir les primitives associées.

$f(x)$	$F(x)$	I
$u'(x)v'(u(x))$	$v(u(x))$	$I \subset \mathcal{D}_{vou}$
$u'(x)u(x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$I \subset \mathcal{D}_u$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, I tel que u ne s'annule pas si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, I tel que $u > 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$
$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$	I tel que $u > 0$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	I tel que u ne s'annule pas
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^u(x)$	$I \subset \mathcal{D}_u$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	$I \subset \mathcal{D}_u$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$	$I \subset \mathcal{D}_u$

III Intégrales

Définition

Soient I un intervalle et $a, b \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue
On appelle *intégrale* de f de a à b, le réel

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive (quelconque) de f sur I.

Exemple

- $\int_0^\pi \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2$
- $\int_1^2 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_1^2 = \ln(1+2) - \ln(1+1) = \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
- L'intégrale d'une fonction constante sur un segment $[a, b]$ correspond à la constante multipliée par la longueur de l'intervalle : $\forall a, b, C \in \mathbb{R}, a \leq b \ : \ \int_a^b C = C(b-a)$.
  NB : C'est l'aire du rectangle de hauteur C et de largeur $(b-a)$...
- Calculer les intégrales suivantes :

  a) $\int_1^2 xdx$ et $\int_2^3 xdx$ b) $\int_0^2 e^{2t}dt$ c) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$

Remarque.
- La lettre x dans la définition de l'intégrale est une variable muette, qui peut être remplacée par n'importe quelle lettre. On a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = [F(t)]_a^b$.
- La définition ne dépend pas le la primitive F choisie. En effet, si G est une autre primitive de f sur I, on a $G = F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, et donc $G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$.
- Cette définition a du sens pour $a \leq b$ et pour $b \leq a$. On a :

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$$

Propriété

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues, et $a, b \in I$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, et $a, b, c \in I$. Alors on a la **relation de Chasles** :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Démonstration. Le premier point découle directement de la linéarité de l'opération de primitivisation. Pour le second point, soit F une primitive de f sur I. On a $F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$, d'où l'égalité annoncée. □

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors la fonction : $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une **primitive** de f sur I.

Démonstration. Soit G une primitive de f sur I. Alors pour tout $x \in I$, on a : $F(x) = G(x) - G(a)$.
Ainsi, on a $F = G - G(a)$, donc F diffère de G d'une constante réelle : F est donc bien une autre primitive de f sur I. □

Remarque.

- On a donc un lien très très fort entre primitives et intégrales, et ce dans les deux sens. Ainsi, l'obtention d'une primitive permet de réaliser un calcul d'intégrale. Mais aussi, réciproquement, il est parfois nécessaire de passer par un calcul d'intégrale pour déterminer une primitive.
- On verra plus tard dans l'année qu'on peut définir l'intégrale d'une manière différente. Cependant, toutes les propriétés resteront les mêmes, et notamment la proposition ci-dessus, parfois appelée le *théorème fondamental de l'analyse.*
- Le calcul intégral est historiquement lié à la question du calcul des aires de surfaces délimitées par des frontières courbes. On pourra déjà retenir que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ donne une **mesure de « l'aire algébrique sous la courbe »**. Il s'agit de l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentant f, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, en comptant en positif ce qui est au-dessus de l'axe des abscisses et en négatif ce qui est en-dessous.

Dessin

IV Intégration par parties

Définition

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I si :

- f est dérivable sur I ;
- f' est continue sur I.

Remarque. C'est le cas de toutes les fonctions usuelles, en prenant I un intervalle contenu dans leur domaine de dérivabilité. Cependant, ce n'est pas le cas de toutes les fonctions ! Nous verrons plus tard des exemples de fonctions dérivables qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce chapitre, toutes les fonctions que nous croiserons seront de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration. Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, la fonction $u \times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut :
$\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. De plus, cette fonction est continue sur I.
On peut donc bien écrire son intégrale entre a et b, et celle-ci vaut :

$$\int_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right) dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\, a^b$$

La formule d'intégration par parties s'en suit en isolant le terme $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx$. □

Exemple

Calculons $\int_0^3 xe^x dx$. On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
u et v sont alors de classe $\mathcal{C}^1$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.
Alors, on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^3 xe^x dx &= \int_0^3 u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^3 - \int_0^3 u'(x)v(x)dx \\ &= [xe^x]_0^3 - \int_0^3 e^x dx \\ &= 3e^3 - 0e^0 - [e^x]_0^3 \\ &= 3e^3 - e^3 + e^0 = 2e^3 + 1\end{aligned}$$

Théorème

Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$

Démonstration. On sait qu'une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par la fonction $x \mapsto \int_1^x \ln(t)dt$.
Calculons cette intégrale par intégration par parties.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On applique le théorème d'intégration par parties aux fonction $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto t$, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, et vérifient : $\forall t > 0, u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)dt &= \int_1^x 1 \times \ln(t)dt \\ &= \int_1^x u(t)v'(t)dt \\ &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t)dt \\ &= [tln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}tdt \\ &= x\ln(x) - 1\ln(1) - \int_1^x 1dt \\ &= x\ln(x) - 0 - [x]_1^x \\ &= x\ln(x) - x + 1\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $.x \mapsto x\ln(x) - x$ en est une aussi. □

Exercice 1. *Par la même méthode, déterminer une primitive de l'application $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.*

Méthode

- Pour calculer $\int_a^b P(t)\ln(t)dt$ où P est polynomiale : on primitive P et on dérive ln, afin de se ramener à une intégrale polynomiale.
- Pour calculer $\int_a^b P(t)e^t dt$ où P est polynomiale : on dérive P et on primitive exp, autant de fois que nécessaire pour que le polynôme disparaisse. En effet, à chaque dérivation du polynôme, son degré diminue, jusqu'à arriver à 0.
- Même méthode pour calculer $\int_a^b P(t)\cos(t)dt$, ou $\int_a^b P(t)\sin(t)dt$

V Changement de variable

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans I. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

On dit qu'on réalise le **changement de variable** $x = \varphi(t)$

Exemple

- Calculons $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}$, à l'aide du changement de variable $t = e^x$.
  L'application $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et a pour dérivée $\varphi' = \varphi$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} &= \int_0^1 \frac{1}{e^x(e^x+1)} e^x dx \\
&= \int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{t(t+1)} dt \\
&= \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^e \\
&= ln(e) - ln(e+1) - ln(1) + ln(1+1) = 1 + \ln(2) - \ln(e+1)
\end{aligned}$$

- Calculons $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$ à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt &= \int_1^e \ln(t) \times \frac{1}{t} dt \\
&= \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} u du = \int_0^1 u du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$