Exemple 1

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée. On gagne un euro à chaque fois que Pile sort, et on perd un euro à chaque fois que Face sort.
L'univers de probabilité associé à cette expérience est ....
La probabilité associée est ....
Les valeurs possibles de gain associée à ce « jeu » sont ....
....

Exemple 2

- On lance trois dés et on appelle X la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus. $X(\Omega) =$ ....
- On tire 5 fois successivement, sans remise, dans une urne contenant 10 boules rouges et 2 boules bleues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées, et T celle égale au rang de la première boule bleue, en posant $T(\omega) = 0$ si on n'obtient aucune boule bleue.
On a $X(\Omega) =$ .... et $T(\Omega) =$ ....
- Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement de Ω. Alors la fonction

Exemple 3

On lance deux dés dont on considère la somme X.

1. Déterminer l'univers Ω et expliciter la fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'univers image $X(\Omega)$.
3. Expliciter les événements $(X = 11)$, $(X > 10)$, $(X < 2)$ et $\left(\frac{72}{9} \leq X < \frac{81}{10}\right)$.

Exemple 4

On reprend la variable aléatoire X correspondant à la somme de 2 dés équilibrés. Déterminer la loi de X dans un tableau.

Exemple 5

1. Justifier qu'il existe une variable aléatoire X dont la loi est :

x	-2	1	5	8
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

2. À l'aide de la fonction `randint` du module `random`, écrire une fonction `simul_X()` qui simule cette variable.

Exemple 6

Représenter la fonction de répartition des deux variables aléatoires des exemples 4 et 5.

Exemple 7

On tire dans un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n. On effectue 5 tirages successifs avec remise, et on note M la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

1. Déterminer Ω et $M(\Omega)$.
2. On note $X_1, \dots X_5$ les variables aléatoires correspondant à chacun des résultats obtenus. Exprimer M à partir de $X_1, \dots, X_5$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Exprimer l'événement $(M \leq k)$ à partir des événements $(X_i \leq k)$.
4. En déduire la fonction de répartition de M, puis sa loi.

Exemple 8

On tire deux fois dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).
On note X le résultat du premier tirage et Y le résultat du second.

- Si les tirages se font avec remise, alors X et Y ....
- Si les tirages se font sans remise, alors X et Y ....

Exemple 9

Dans l'exemple précédent, si le tirage est avec remise, alors .... et .... sont indépendantes.

Exemple 10

Si X_1, X_2, X_3, X_4 sont indépendantes, alors :

- .... et .... sont indépendantes.
- .... et .... sont indépendantes.
- .... et .... sont indépendantes.
- ...., ... et .... sont indépendantes.

Exemple 11

1. Lorsque $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(X) =$

2. Si $X(\Omega) = \{-3, -1, 0, 2, 5\}$, alors $\mathbb{E}(X) =$

3. Si X est une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) =$

4. Déterminons l'espérance de la variable X égale à la somme obtenue en lançant deux dés équilibrés. On a déjà déterminé que la loi de X est donnée par :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On a donc $\mathbb{E}(X) =$

Exemple 12

- Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $\mathbb{E}(X^3) =$

- Si $X(\Omega) = \{-3, 0, 1\}$, alors $\mathbb{E}(e^X) =$

- On considère une variable aléatoire X de loi donnée par :

x	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$

Calculer l'espérance des variables définies par $Y = |X|$, $Z = 3X^2 - 2$ et $T = X(X+1)(X+2)$.

Exemple 13

Calculons la variance de associée à la somme de deux dés équilibrés. Si on note X cette variable aléatoire, on a déjà déterminé la loi de X et calculé que $\mathbb{E}(X) = 7$. Ainsi, la loi de $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est :

x	0	1	4	9	16	25
$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 = x)$						

Ainsi, on a $\mathbb{V}(X) =$

Exemple 14

Calculer la variance de la variable aléatoire X définie par :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Exemple 15

On lance plusieurs fois une pièce non truquée. À chaque lancer, on gagne 1€ si le résultat est "Face" et on perd 0,5€ si le résultat est "Pile".

1. Déterminer l'espérance et la variance du gain pour un seul lancer.
2. Déterminer l'espérance et la variance du gain si on lance 10 fois la pièce.

Exemple 16

Le résultat obtenu en tirant dans une urne contenant n boules numérotée de 1 à n suit la loi ....
Le résultat obtenu à un lancer de dé équilibré suit la loi ....

Exemple 17

On lance une pièce de monnaie équilibrée, et on note X la variable aléatoire égale à 1 si pile tombe et 0 sinon. Alors ....
Si la pièce est truquée et donne pile avec probabilité p, alors ....

Exemple 18

- On lance 6 fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois "Face".
- On lance 10 fois un dé équilibré. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement trois fois "6".