IV Lois (discrètes finies) de référence

1. Loi certaine

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω **suit la loi certaine égale à** a lorsque $X(\Omega) = \{a\}$.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi certaine de valeur $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\mathbb{E}(X) =$
- $\mathbb{V}(X) =$

De plus, la fonction de répartition de X est donnée par : $F_X(x) = \Bigg\{$

2. Loi uniforme

Définition

Soit E une sous-ensemble *fini non vide* de $\mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire X **suit la loi uniforme sur** E, et on note $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)}$ lorsque :

$$X(\Omega) = E \quad \text{et} \quad \forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(E)}$$

En particulier :

- pour $n \in \mathbb{N}^*$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ lorsque $X(\Omega) =$ et $\forall 1 \leq k \leq n, \mathbb{P}(X = k) =$
- pour $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![a, b]\!]\right)$ lorsque $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$ et $\forall k \in [\![a, b]\!], \mathbb{P}(X = k) =$

Propriété

Si X suit une loi uniforme sur un ensemble fini E, alors son espérance correspond à ....
....

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, $a, b \in \mathbb{Z}, a < b$. Alors

Démonstration. $\square$

3. Loi de Bernoulli

Définition

Soit $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X ...., et on note ...., lorsque :

Remarque. Finalement, ce n'est rien d'autre qu'une indicatrice $\mathbb{1}_A$...

Propriété

Soit $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Alors :

- $\mathbb{E}(X) =$
- $\mathbb{V}(X) =$

De plus, la fonction de répartition de X est donnée par $\mathcal{F}_X(x) = \left\{ \right.$

Démonstration.

- $\mathbb{E}(X) =$
- $X^2 =$ donc $\mathbb{E}(X^2) =$ et donc $\mathbb{V}(X) =$

□

4. Loi binomiale

On considère une expérience aléatoire qui conduit soit à un succès S, avec probabilité p, soit à un échec E, avec probabilité $1-p$. **On répète n fois cette expérience de Bernoulli de façons indépendantes**, et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale au **nombre de succès obtenus**. Déterminons la loi de X.

$\Omega =$ et donc $\text{Card}(\Omega) =$ et $X(\Omega) =$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Les issues qui vérifient $X = k$ sont celles qui ont exactement

La probabilité d'**un** événement élémentaire constitué de k succès et $(n-k)$ échecs E vaut

car

Finalement, on a : $\mathbb{P}(X = k) =$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dit qu'une variable aléatoire X ...., et on note ...., lorsque

Remarque.

- Il s'agit donc de la loi du nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
- On peut vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$.
- En probabilités, on note souvent $q = 1 - p$ dans le cadre d'une loi de Bernoulli ou d'une loi binomiale. On a alors $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, et $X \hookrightarrow Bin(n,p)$. Alors :

- $\mathbb{E}(X) =$
- $\mathbb{V}(X) =$