Chapitre 20 – Probabilités finies

I Vocabulaire des probabilités

1. Expériences aléatoires et univers des possibles

On parle d'**expérience aléatoire** lorsqu'une expérience a plusieurs issues (ou résultats) possibles, mais qu'on ne peut pas prévoir laquelle de ces issues sera réalisées.

Définition

Exemple

1. On lance un dé à 6 faces et on observe la face supérieure. Les différentes issues possibles de l'expérience sont ...., soit : ....
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, dont 6 boules vertes et 4 boules dorées.
Si on s'intéresse à couleur de la boule obtenue, on a $\Omega =$ ....
Si on s'intéresse à son numéro, on a $\Omega =$ ....
3. On lance deux fois de suite un dé à 6 faces. Les possibles sont alors les **couples** (x, y) où x correspond au résultat du premier lancer, et y au résultat du second lancer. Ainsi : ....

Remarque. Cette année, nous ne considérerons que des expériences sur un **univers fini**, c'est-à-dire ....
....
Ainsi, on aura Ω un ensemble ....

2. Événements

Définition

On considère une expérience aléatoire sur un univers fini Ω.
On appelle

Vocabulaire

Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- On dit que l'événement A est **réalisé** lorsque le résultat ω de l'expérience vérifie ....
- L'événement .... est appelé **l'événement certain**.
- L'événement .... est appelé **l'événement impossible**.
- On appelle **événement élémentaire** tout ....
- On appelle **événement contraire de** A l'événement ....
- On dit que A et B sont des **événements** .... lorsque ....

Remarque. Les opérations ensemblistes se traduisent toutes dans le vocabulaire des probabilités. Notamment, l'événement « A et B » correspond à .... et l'événement « A ou B » correspond à ....

Exemple

On considère le lancer d'un dé à 6 faces.

- L'événement A : « le résultat est pair » est réalisé exactement pour les résultats .... Ainsi, on a : .... Son événement contraire est ....
- L'événement B : « le résultat est inférieur à 10 » est ....
- L'événement C : « le résultat est supérieur ou égal à 6 » est exactement ....
- L'événement D : « le résultat est divisible par 10 » est ....
- Les événements A et C sont-ils incompatibles ? ....
- Les événements .... sont incompatibles.

Définition (*Système complet d'événements*)

Exemple

1. Si A est un événement ....
2. Si on écrit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, alors la famille constituée des événements ....
3. On lance successivement deux dés à 6 faces. On considère les événements :
   - A : « On obtient deux nombres pairs »
   - B : « On obtient un nombre pair et un nombre impair »
   - C : « On obtient deux nombres impairs ».

   Alors ....

Remarque. Si Ω est un univers fini, on dit que ....
Dans le cas où Ω n'est pas fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas toujours le cadre le mieux adapté à l'étude, car certains éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ ne découlent pas de l'expérience. On définira à la place une notion de *tribu* qui regroupera les événements de l'expérience.

II Lois de probabilité

1. Définition

Définition

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Alors :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$,
2. $\mathbb{P}(\varnothing) =$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$,
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'événements .... :
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

Démonstration. □

Corollaire

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A un événement. Si on écrit $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ les différents possibles de A, alors :

Exemple

Un dé à 6 faces est truqué de sorte que $\mathbb{P}(\{6\}) = \mathbb{P}(\{4, 5\}) = \mathbb{P}(\{1, 2, 3\})$. On sait de plus que $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \dfrac{1}{12}$.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir 6 avec ce dé.
2. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\{5\})$ et $\mathbb{P}(\{2\})$.
3. On note E l'événement « le nombre obtenu est pair », et F : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 4 ».
   Déterminer la probabilité de E, F, $\overline{E}$, $E \cap F$, $E \cup F$.

Corollaire

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements. Alors :

Théorème (*Probabilités totales V1*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $B \subset \Omega$ un événement, et $(A_1, \dots, A_n)$ un **système complet d'événements**. Alors :

2. Caractérisation d'une probabilité

Proposition (*Méthode*)

Exemple

On lance un dé truqué, pour lequel la probabilité d'obtenir chaque face est proportionnelle à la valeur de la face. On souhaite déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

3. Probabilité uniforme

Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers des possibles fini ($n \in \mathbb{N}$).

Proposition

Soit Ω un univers finie, $\mathbb{P}$ la probabilité **uniforme** sur Ω, et $A \subset \Omega$ un événement. Alors :

Remarque. Autrement dit, la probabilité de A se calcule par :

Ainsi, dans le cas d'une probabilité uniforme, on se ramène à un . . . .

Remarque. Le fait que la probabilité est uniforme est souvent **implicite** dans l'énoncé (on tire dans une urne, on lance un dé ou une pièce équilibrée, on pioche une carte, etc.)

Remarque. En Python, dans le module random :

- la fonction `randint(a,b)` renvoie un entier choisi uniformément dans l'intervalle $[\![a, b]\!]$ (inclus).
- la fonction `choice(L)` renvoie un élément choisi uniformément dans la **liste** L.

Exemple

1. On pioche deux cartes parmi un jeu de 52 cartes.
   (a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux cartes de cœur.

   (b) Déterminer la probabilité d'obtenir une paire.

2. On range au hasard 5 jetons dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3.
   Quelle est la probabilité qu'aucune boîte ne reste vide ?
   Le nombre total de possibilités est . . . . (il correspond à l'univers . . . .).
   - Le nombre de possibilités pour avoir 2 boîtes vides est . . . . . .
   - Le nombre de possibilités qui amènent à avoir exactement 1 boîte vide est . . . .
   - Ainsi, le nombre de possibilités qui amènent à n'avoir aucune boîte vide est . . . .

   Finalement, la probabilité cherchée vaut :

Dans toute la fin du chapitre, on se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

III Probabilités conditionnelles

1. Définition

Définition

Démonstration. $\square$

Corollaire

Soient A, B, C trois événements, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Alors :

- $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.
- Si $B \subset C$, alors $\mathbb{P}_A(B) \leq \mathbb{P}_A(C)$.
- $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$.

Exemple

On choisit une famille française avec deux enfants, au hasard.

- On cherche la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aînée est une fille.
- On cherche la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille.

2. 3 formules fondamentales

Théorème (. . . . .)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que . . . . Alors :

Remarque. Cette formule s'utilise lorsque l'expérience s'effectue en plusieurs étapes, et qu'on s'intéresse . . . .

C'est par exemple le cas quand on modélise une expérience aléatoire par un arbre de probabilités, et qu'on calcule la probabilité associée à . . . .

Exemple

Un urne contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. On tire 3 boules successivement sans remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte suivie de deux boules rouges ?

Théorème (. . . . .)

Soit $B \subset \Omega$ un événement, et $(A_1, \dots, A_n)$ un . . . .

On suppose que . . . . Alors :

Remarque. Cette formule s'utilise aussi lorsque l'expérience s'effectue en plusieurs étapes, et que l'on s'intéresse . . . .

Exemple

On dispose dispose de deux urnes, l'une contenant 5 boules blanches et 3 boules rouges, et l'autre contenant 2 boules blanches et 3 boules rouges.
On lance un dé à 6 faces équilibré. Sur un 5 ou 6, on tire une boule la première urne. sur un autre numéro, on tire une boule dans la seconde urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Théorème (.............................)

Soient A, B deux événements .... Alors :

Remarque. Cette formule s'utilise pour « remonter le temps » d'une expérience aléatoire réalisée en plusieurs étapes : sachant le résultat final, elle permet de connaître la probabilité d'avoir été dans telle ou telle situation antérieurement.

Exemple

On considère un symptôme présent chez 60% des individus atteints d'une maladie grave, et chez 0.1% des individus sains.
On sait de plus que la maladie touche un individu sur 50000.
José est atteint du symptôme et s'inquiète. Quelle est la probabilité qu'il soit gravement malade ?

IV Événements indépendants

Intuitivement : Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si la probabilité de l'un est la même, ..., c'est-à-dire :

Définition

Soient A, B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}$

Exemple

1. On lance un dé équilibré à 6 faces. Les événements A « obtenir un pair » et B « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 » sont-ils indépendants ?
2. On lance deux dés équilibrés. Les événements « le premier résultat est pair » et l'événement « la somme des deux dés est impaire » sont-ils indépendants ?
   Ici, chacun de ces deux événements a pour probabilité ...., et leur intersection a pour probabilité ....
3. On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un 3 au premier lancer puis un 1 au second ?

Remarque. L'indépendance est souvent **implicite** dans l'énoncé. Par exemple, quand on réalise des lancers successifs ou des tirages avec remise.

Définition (*Événements mutuellement indépendants*)
Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements, $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'ils sont **mutuellement indépendants** lorsque :

$$\forall I \subset [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple

- Pour $n = 3$, les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si et seulement si :

- On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On considère les événements : A_1 (resp A_2) : « le dé premier (resp. second) dé est pair », et S : « la somme est paire ».
  Les événements A_1, A_2 et S sont-ils mutuellement indépendants ?

Remarque.
- ⚠ Ne pas confondre :
  -
  -

  L'indépendance mutuelle est une notion **plus forte** que l'indépendance 2 à 2 !
- L'indépendance mutuelle est souvent implicite dans l'énoncé.

Exemple

On lance n fois un dé. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir 6.