Analyse

# Formulaire sur les dérivées

## Dérivées des fonctions usuelles.

| | Expression de la fonction f | Domaine de dérivabilité de f | Expression de la dérivée de f |
|---|---|---|---|
| Fonctions puissances | $x \mapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ |
| | $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ | $\mathbb{R}^\star$ | $x \mapsto -nx^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{1+n}}$ |
| | $x \mapsto \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^{+\star}$ $\left(⚠\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+\right)$ | $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| | $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | $\mathbb{R}^{+\star}$ | $x \mapsto \dfrac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ |
| Log | $x \mapsto \ln x$ | $\mathbb{R}^{+\star}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ |
| Exponentielle | $x \mapsto e^x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto e^x$ |
| | $x \mapsto a^x = e^{x \ln a},\ a > 0$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$ |
| Trigonométriques | $x \mapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto -\sin x$ |
| | $x \mapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos x$ |
| | $x \mapsto \tan x$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ | $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| Arctan | $x \mapsto \arctan x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| Valeur absolue | $x \mapsto \lvert x \rvert$ | $\mathbb{R}^\star$ $\left(⚠\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\right)$ | $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ |

## Dérivées des composées

Soit $u$ une fonction **dérivable** sur $I$.

| | **Expression de la fonction f** | **Condition sur la fonction** $u$ | **Expression de la dérivée de f** |
|---|---|---|---|
| Fonctions puissances | $x \mapsto u(x)^n$ | Aucune | $x \mapsto nu'(x) \times u(x)^{n-1}$ |
| | $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)^n}$ | $\forall x \in I,\ u(x) \neq 0$ | $x \mapsto = \dfrac{-nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$ |
| | $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ | $\forall x \in I,\ u(x) > 0$ | $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |
| | $x \mapsto u(x)^\alpha = e^{\alpha \ln u(x)},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ | $\forall x \in I,\ u(x) > 0$ | $x \mapsto \alpha u'(x) \times u(x)^{\alpha-1}$ |
| Log | $x \mapsto \ln u(x)$ | $\forall x \in I,\ u(x) > 0$ | $x \mapsto = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ |
| Exp | $x \mapsto \exp(u(x))$ | Aucune | $x \mapsto u'(x) \times \exp(u(x))$ |

## OPérations avec les dérivées.

❶ **Produit :** Si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur $I$, alors le produit $uv$ est dérivable sur $I$ et

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

❷ **Inverse :** Si $v$ est dérivable sur $I$ et ne s'annule pas sur $I$, alors l'inverse de $v$ est dérivable sur $I$ et

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$$

❸ **Quotient :** Si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur $I$ et $v$ ne s'annule pas sur $I$, alors le quotient de $u$ par $v$ est dérivable sur $I$ et

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

❹ **Composée :** Si $u$ est dérivable sur $I$ et $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle $J$ avec $u(I) \subset J$, alors la composée de $f$ par $u$ est dérivable sur $I$ et

$$\boxed{(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u) \qquad \text{à savoir} \qquad \forall x \in I, \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'[u(x)]}$$

❺ **Réciproque :** Si $u$ est dérivable sur $I$, bijective de $I$ dans $J$ et $\forall x \in I,\ u'(x) \neq 0$, alors $u^{-1}$ est dérivable sur $J$ et

$$\boxed{\forall y \in J,\ (u^{-1})'(y) = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))}}$$