Concours Blanc 2026 – Maths

Corrigé

Problème 1. Déplacement aléatoire

Une mouche vole aléatoirement d'une fenêtre à l'autre du salon. Le salon a 4 fenêtres, qu'on appellera A, B, C, D.
On observe la mouche sur la fenêtre A à l'instant 0. On remarque qu'à tout instant :

- Si la mouche est à la fenêtre A, alors à l'instant suivant, il y a une chance sur 3 qu'elle aille à la fenêtre C et 2 chances sur 3 qu'elle reste à la fenêtre A.
- Si elle est à la fenêtre B, elle va à l'instant suivant sur la fenêtre A ou sur la fenêtre C, de manière équiprobable.
- Si elle est à la fenêtre C, elle part sur les fenêtres B ou D l'instant suivant, de manière équiprobable.
- Enfin, si la mouche est à la fenêtre D, elle y reste avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ à l'instant d'après, et sinon elle va sur la fenêtre B.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n (respectivement B_n, C_n, D_n) l'événement : « La mouche se trouve sur la fenêtre A (resp. B, C, D) à l'instant n. »

1. À tout instant $n \in \mathbb{N}$, la mouche est sur exactement l'une des fenêtres A, B, C ou D. Ainsi, (A_n, B_n, C_n, D_n) forme un **système complet d'événements**.
   On a donc bien : $\boxed{\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n) = 1}$.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_n) \times \frac{2}{3} + \mathbb{P}(B_n) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(C_n) \times 0 + \mathbb{P}(D_n) \times 0 \\ &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)\end{aligned}$$

   b) De la même manière, on obtient :

   - $\mathbb{P}(B_{n+1}) = 0\mathbb{P}(A_n) + 0\mathbb{P}(B_n) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(D_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(D_n)$
   - $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)$
   - $\mathbb{P}(D_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \dfrac{2}{3}\mathbb{P}(D_n)$.

3. On a $U_0 = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(A_0)\\ \mathbb{P}(B_0)\\ \mathbb{P}(C_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $AU_n + B = \begin{pmatrix}\frac{4}{6}\mathbb{P}(A_n) + \frac{3}{6}\mathbb{P}(B_n)\\ -\frac{2}{6}\mathbb{P}(A_n) - \frac{2}{6}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}\\ \frac{2}{6}\mathbb{P}(A_n) + \frac{3}{6}\mathbb{P}(B_n)\end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)\\ -\frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)\end{pmatrix}$

D'autre part : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(D_n) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) \end{pmatrix}$

Comme $\mathbb{P}(D_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(C_n)$, on obtient :

$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}C_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(C_n) = -\frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}.$

On trouve bien égalité entre les deux matrices, d'où : $\boxed{U_{n+1} = AU_n + B}$.

4. a) Soit $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} L = AL + B &\iff 6L = 6AL + 6B \\ &\iff \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 3y \\ -2x - 2y + z + 2 \\ 2x + 3y \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & & & = & 0 \\ 2x & + & 8y & - & z & = & 2 \\ -2x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & & & = & 0 \\ & & 11y & - & z & = & 2 \\ & - & 6y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 10z & = & 2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & \frac{1}{5} \\ y & = z = \frac{1}{5} & \\ x & = & \frac{3y}{2} = \frac{3}{10} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation $L = AL+B$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est : $\boxed{L = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ la propriété : "$U_n = A^n(U_0 - L) + L$". Montrons par récurrence que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation $(n = 0)$:** $A^0 = I_3$, donc $A^n(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$. Ainsi, $H(0)$ est bien vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $H(n)$ est vrai. On a alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B && \text{d'après la questions 3} \\ &= A(A^n(U_0 - L) + L) + B && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1}(U_0 - L) + AL + B && \text{en développant} \\ &= A^{n+1}(U_0 - L) + L && \text{puisque } AL + B = L \end{aligned}$$

$H(n+1)$ est donc bien vraie. D'où l'hérédité.

Ainsi, on a bien montré par principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n(U_0 - L) + L}$.

Calcul des puissances de A

5. a) Par produit matriciel, on obtient $RQ = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I_3$, donc $R \times \left(\frac{1}{10}Q\right) = I_3$.

On en déduit que $\boxed{R \text{ est inversible, avec } R^{-1} = \frac{1}{10}Q = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$.

b) Par produit matriciel, on obtient bien :

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 4 & 8 & -4 \\ 12 & 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'(n)$ la propriété : « $A^n = RD^nR^{-1}$ ». Montrons cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation $(n = 0)$:** On sait que $A^0 = I_3$ et $D^0 = I_3$ donc $RD^0R^{-1} = RI_3R^{-1} = RR^{-1} = I_3$.
     La propriété $H'(0)$ est bien vraie.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H'(n)$ est vraie. On sait que $R^{-1}AR = D$, donc $\boxed{A = RDR^{-1}}$. Alors :
     $A^{n+1} = A^n \times A = RD^nR^{-1}RDR^{-1} = RD^nI_3DR^{-1} = RD^nDR^{-1} = RD^{n-1}R^{-1}$.
     Ainsi, la propriété $H'(n+1)$ est encore vraie. D'où l'hérédité.

   On a bien montré par principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = RD^nR^{-1}.}$

7. D est une matrice diagonale, donc on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{6})^n & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}}$.

   On a $\frac{1}{6}, \left|-\frac{1}{3}\right|, \frac{1}{2} \in [0, 1[$, donc tous les coefficients **tendent vers** 0 !

8. Puisqu'on admet que les règles de calcul sur les limites sont encore vraies pour les matrices, et qu'on peut écrire $D^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $A^n = RD^nR^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Ainsi, $U^n = A^n(U_0 - L) + L \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{5}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \dfrac{1}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \dfrac{3}{10}$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(D_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(C_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{10}$.
   On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(D_n) = \dfrac{3}{10}}$.

Problème 2. Approximations d'une intégrale

A - Préliminaires

1. On doit avoir $x \neq 0$ et $1+x>0$, donc $x>-1$.
   Ainsi, le domaine de définition de f est $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[}$.
2. En 0, on a $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$.
   Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}$. On obtient une limite finie, donc f admet bien un **prolongement par continuité en** 0, en posant $f(0)=1$.
3. La fonction f est alors **continue sur le segment** $[0,1]$, donc l'intégrale est $\boxed{\text{bien définie}}$.

B - Première approximation

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n \times \frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
   Ainsi, comme f est continue sur $[0,1]$, d'après le **théorème des sommes de Riemann**, on a $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = I}$.
5.
```python
from math import log
def première_approche(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S += log(1 + k/n) / n
    return S
```
6. a)
```python
N = 0
while abs(première_approche(n+1) - première_approche(n)) > 10**(-5):
    N += 1
print(N)
```
   b) On peut avoir deux termes consécutifs de la suite proches l'un de l'autre, sans pour autant que les termes soient proches de leur limite ! Par exemple avec une suite constante égale à 0 sur les premiers termes, puis constante égale à 1...

C - Un développement limité

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Le polynôme P_n est de degré n et de coefficient $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.
   b) On a $P_n' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k X^k$. On obtient :
   $(1+X)P_n' = P_n' + XP_n' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k X^k + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k X^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k X^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}X^k$.
   Ainsi : $(1+X)P_n' = X^0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k X^k - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k X^k - (-1)^n X^n \boxed{= 1-(-X)^n}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.
   On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $(t+1)P_n'(t) = 1-(-t)^n$, donc $\dfrac{(-t)^n}{t+1} = \dfrac{1}{t+1} - P_n'(t)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(-t)^n}{t+1}dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - P_n'(t)\right)dt \\ &= [\ln(t+1) - P_n(t)]_0^x \\ &= \ln(x+1) - P_n(x) + \ln(1) + P_n(0) = \ln(x+1) - P_n(x)\end{aligned}$$

puisque $P_n(0)=0$. On a donc bien : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,1], \ln(x+1)-P_n(x)=\int_0^x \frac{(-t)^n}{t+1}dt}$.

9. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$. D'après le question précédente :

$$\begin{aligned}
|\ln(x+1)-P_n(x)| &= \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{t+1}dt\right| \\
&\leq \int_0^x \frac{t^n}{t+1}dt && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \int_0^x t^n dt && \text{par croissance de l'intégrale} \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

On a bien montré : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,1], |\ln(x+1)-P_n(x)|\leq \frac{x^{n+1}}{n+1}}$.

10. a) Soit $g : I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0\in I$. On dit que g est dérivable en x_0 lorsque le taux d'accroissement $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

b) Soit $x>0$. On a : $\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x}=\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$. D'autre part : $\frac{\ln(1+x)-P_2(x)}{x^2}-\frac{1}{2} = \frac{\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}-\frac{1}{2} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

On a bien l'égalité : $\boxed{\forall x>0, \frac{f(x)-1}{x}=\frac{\ln(1+x)-P_2(x)}{x^2}-\frac{1}{2}}$.

c) Soit $x>0$. On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\ln(1+x)-P_2(x)}{x^2}-\frac{1}{2}$ d'après la question précédente.

Or on sait que $|\ln(x+1)-P_2(x)|\leq\frac{x^3}{3}$, donc $\left|\frac{\ln(1+x)-P_2(x)}{x^2}\right|\leq\frac{x}{3}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.

Ainsi, on a $\frac{\ln(1+x)-P_2(x)}{x^2}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. D'où, par somme : $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}}$.

On a obtenu une limite réelle, donc f **est bien dérivable en** 0, avec $\boxed{f'(0)=-\frac{1}{2}}$.

D - Seconde approximation de I

11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Pour tout $x>0$, d'après l'inégalité de la question 9 : $|g_n(x)|\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)x}=\frac{x^n}{n+1}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ puisque $n\geq1$.

Ainsi, par encadrement, on a bien $g_n(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0=g_n(0)$.

$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ est donc bien continue en } 0.}$

b) Remarquons déjà que l'intégrale de l'énoncé à bien un sens puisque g_n est continue sur $[0,1]$. De plus, on a, pour tout $t\in[0,1]$, $|P_n(t)-\ln(t+1)|\leq\frac{t^{n+1}}{n+1}$, donc par croissance de l'intégrale, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g_n(t)|dt &= \int_0^1 \frac{|P_n(t)-\ln(t+1)|}{t}dt\\ &\leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} = \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt\\ &= \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\boxed{\int_0^1 |g_n(t)|dt \leq \frac{1}{(n+1)^2}}$.

12. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $Q_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}X^{k-1}$.

    Ainsi : $XQ_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}X^{k} = P_n$.

    On a bien vérifié que $\boxed{XQ_n' = P_n}$.

    b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on peut écrire pour tout $x>0$: $xQ_n'(x) = P_n(x)$, donc $\frac{P_n(x)}{x} = Q_n'(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(x)dx &= \int_0^1 \frac{P_n(x)-\ln(x+1)}{x}dx\\ &= \int_0^1 \frac{P_n(x)}{x}dt - \int_0^1 f(x)dx && \text{par linéarité de l'intégrale}\\ &= \int_0^1 Q_n'(x)dx - I\\ &= [Q_n(x)]_0^1 - I = Q_n(1)-Q_n(0)-I\\ &= Q_n(1)-I && \text{puisque } Q_n(0)=0\end{aligned}$$

    On a bien montré : $\boxed{\int_0^1 g_n(x)dx = Q_n(1)-I}$.

13. Finalement, à l'aide des deux questions précédentes et par inégalité triangulaire, on sait qu'on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$0\leq |Q_n(1)-I| = \left|\int_0^1 g_n(x)dt\right| \leq \int_0^1 |g_n(t)|dt \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement, on en déduit que $|Q_n(1)-I| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, o a bien : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} Q_n(1) = I}$.

14. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n = Q_{2n}(1)$ et $v_n = Q_{2n+1}(1)$.

    a) On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Q_{n+1} = Q_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}X^{n+1}$, donc : $\boxed{Q_{n+1}(1) = Q_n(1) + \frac{(-1)^n}{n+1}}$.

    b) On va montrer que la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante, et que $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

    - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n = Q_{2n+2}(1)-Q_{2n}(1) = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}$ d'après la relation de récurrence obtenue précédemment. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.$$

C'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (u_n) est bien (strictement) **croissante**.

- De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2}$ donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0$.
  Ainsi, la suite (v_n) est bien (strictement) **décroissante**.
- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n - u_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- On en conclut que $\boxed{\text{les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont bien adjacentes.}}$

c) D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.
Mais comme il s'agit des suites extraites de la suite $(Q_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers I, la limite en question est $l = I$. On obtient bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, Q_{2n}(1) \leq I \leq Q_{2n+1}(1)}$.

15. D'après la question précédente, il suffit de trouver $N = 2n$ tel que $Q_{2n+1}(1) - Q_{2n}(1) \leq 10^{-4}$.
Or on a calculé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{2n+1}(1) - Q_{2n}(1) = \dfrac{1}{2n+1}$.
Il suffit donc de choisir n pour avoir $\dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{1}{10^4}$, c'est-à-dire $2n+1 \geq 10^4$. $n = 5000$ convient, et donc $N = 2n = 10000 = 10^4$ convient.
Ainsi, on est certain que $\boxed{Q_{10000}(1) \text{ approche la valeur de l'intégrale } I \text{ à } 10^{-4} \text{ près}}$!