

Concours Blanc – Mathématiques

Durée : 2h15
Calculatrice interdite

La qualité de la **rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements sont pris en compte dans l'évaluation, ainsi que le soin. Il est demandé de numéroter soigneusement toutes les pages.

On pourra toujours admettre une question, en le précisant, pour poursuivre la résolution.

Si le candidat pense avoir décelé une erreur dans l'énoncé, il l'indiquera clairement sur sa copie, ainsi que les choix qu'il a été amené à faire pour la suite de l'exercice.

Problème 1. Déplacement aléatoire

Une mouche vole aléatoirement d'une fenêtre à l'autre du salon. Le salon a 4 fenêtres, qu'on appellera A, B, C, D .

On observe la mouche sur la fenêtre A à l'instant 0. On remarque qu'à tout instant :

- Si la mouche est à la fenêtre A , alors à l'instant suivant, il y a une chance sur 3 qu'elle aille à la fenêtre C et 2 chances sur 3 qu'elle reste à la fenêtre A .
- Si elle est à la fenêtre B , elle va à l'instant suivant sur la fenêtre A ou sur la fenêtre C , de manière équiprobable.
- Si elle est à la fenêtre C , elle part sur les fenêtres B ou D l'instant suivant, de manière équiprobable.
- Enfin, si la mouche est à la fenêtre D , elle y reste avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant d'après, et sinon elle va sur la fenêtre B .

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n (respectivement B_n, C_n, D_n) l'événement : « La mouche se trouve sur la fenêtre A (resp. B, C, D) à l'instant n . »

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(D_n) = 1$.
2. a) Montrer soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n)$.
b) Exprimer de la même manière $\mathbb{P}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}(D_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(D_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De plus, on pose :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Donner sans justifier la matrice U_0 , et déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

4. a) Résoudre l'équation matricielle $L = AL + B$ d'inconnue $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

Calcul des puissances de A

On définit $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. a) Calculer RQ , en déduire que R est inversible, et donner son inverse.

b) Vérifier que $R^{-1}AR = D$, où $D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = RD^nR^{-1}$.

7. Donner l'expression explicite de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vers quoi tendent chacun des coefficients lorsque n tend vers $+\infty$?

8. On admet que les règles de calcul sur les limites sont encore vraies pour les matrices, et qu'on peut écrire $D^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Problème 2. Approximations d'une intégrale

Dans tout le problème, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

A - Préliminaires

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on appellera encore f le prolongement obtenu.
3. Justifier que l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)dt$ est bien définie.

B - Première approximation

4. Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{k}$ converge vers I .
5. Écrire une fonction Python `première_approche(n)` qui renvoie S_n .
6. a) Écrire un programme Python qui affiche la plus petite valeur N pour laquelle $|S_{N+1} - S_N| \leq 10^{-5}$.
b) Est-on alors certains que S_N approche I à 10^{-4} près ?

C - Un développement limité

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par :
$$P_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k$$

On rappelle que par convention, on a $P_0 = 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Donner sans justifier le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .
 - b) Vérifier que $(1+X)P'_n = 1 - (-X)^n$.

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \ln(x+1) - P_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Indication : On utilisera la question précédente pour écrire $\frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - P'_n(t)$.

9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$|\ln(x+1) - P_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Indication : On utilisera la majoration $\frac{1}{1+t} \leq 1$ pour tout $t \in [0, x]$.

10. a) Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.

b) Vérifier que pour tout $x > 0$: $\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - P_2(x)}{x^2} - \frac{1}{2}$.

c) En déduire que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$. On utilisera l'inégalité obtenue à la question 9.

D - Seconde approximation de I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction g_n sur \mathbb{R}^+ par $g_n(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x) - \ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

11. À l'aide de l'inégalité obtenue à la question 9 :

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 |g_n(t)| dt \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} X^k$. On a donc encore $Q_0 = 0$.

12. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $XQ'_n = P_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 g_n(x) dx = Q_n(1) - I$$

13. Montrer finalement à l'aide des deux questions précédentes qu'on a la convergence :

$$Q_n(1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = Q_{2n}(1)$ et $v_n = Q_{2n+1}(1)$.

a) Établir une relation de récurrence simple pour la suite $Q_n(1)$.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On commencera par donner la définition de deux suites adjacentes.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Q_{2n}(1) \leq I \leq Q_{2n+1}(1)$.

15. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approche I à 10^{-4} près.