

Corrigé DS 1

Exercice 1

1) $\text{Non}(A(f)) \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, f(x) \neq 0$

2) $B(f) \Leftrightarrow [(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)) \Rightarrow f(0) = 1]$

$\text{Non}(B(f)) \Leftrightarrow [(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)) \text{ et } f(0) \neq 1]$

3) a) Avec $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$:

• $A(f)$ est vraie. En effet, si on prend $A \in \mathbb{R}$ quelconque, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(2k\pi) + \frac{\pi}{2} > A$. En prenant $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, on a bien $x > A$ et $f(x) = 0$.

• $B(f)$ est vraie puisque $\cos$ est paire et $\cos(0) = 1$.

b) Avec $f: x \in \mathbb{R} \mapsto 0$:

• $A(f)$ est vraie, en prenant $x = A + 1 > A$.

• $B(f)$ est fausse, puisque 0 est paire mais $f(0) = 0 \neq 1$.

c) Avec $f: x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$:

• $A(f)$ est fausse car $\exp.$ ne prend jamais la valeur 0.

• $B(f)$ est vraie car $\exp$ n'est pas paire!

Exercice 2

a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$. On a:

$$\frac{1}{x+1} \geq \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{(x+1)(x+2)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2-x^2-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

Dessons le tableau de signe de $f: x \mapsto \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x+1)(x+2)}$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\sqrt{2}-x$	+	+	+	+	+	-
$\sqrt{2}+x$	-	-	0	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$f(x)$	-	+	0	-	+	-

Donc $\mathcal{I} =]-2, -\sqrt{2}] \cup]-1, \sqrt{2}]$

b) $x^3 + 8x^2 + 5x - 14 = 0$

Posons $f(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$

Racine évidente: $f(1) = 1 + 8 + 5 - 14 = 0$.

On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c \\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 8 \\ c - b = 5 \\ -c = -14 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 + 1 = 9 \\ 14 - 9 = 5 \\ c = 14 \end{cases}$$

Donc on a $f(x) = (x-1)(x^2+9x+14)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Racines de $x^2+9x+14$: $\Delta = 81 - 56 = 25 = 5^2 > 0$

2 racines: $\frac{-9 \pm 5}{2}$, soit -7 et -2 .

D'où: $f(x) = (x-1)(x+7)(x+2)$.

Ainsi, $S = \{1, -7, -2\}$.

c) $|2x+3| = x^2 - 5$

Cas 1: $2x+3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{3}{2}$.

Sur le domaine $D_1 = [-\frac{3}{2}, +\infty[$, on a:

$$\begin{aligned} |2x+3| = x^2 - 5 &\Leftrightarrow 2x+3 = x^2 - 5 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2 > 0$: 2 racines $\frac{-2 \pm 6}{-2} = 2 \pm 3$: -2 et 4 .

$4 \in D_1$ mais $-2 \notin D_1$ puisque $-2 < -\frac{3}{2}$.

Ainsi, sur le domaine D_1 , on a l'ensemble

de solutions: $S_1 = \{4\}$.

Cas 2: $2x+3 < 0$, c'est-à-dire $x < -\frac{3}{2}$.

Sur le domaine $D_2 =]-\infty, -\frac{3}{2}[$, on a:

$$\begin{aligned} |2x+3| = x^2 - 5 &\Leftrightarrow -2x-3 = x^2 - 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 4 + 8 = 12 > 0$: 2 racines, $\frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Or $\sqrt{3} > 1$ donc $-1 + \sqrt{3} > 0 > -\frac{3}{2}$ et $-1 - \sqrt{3} < -2 < -\frac{3}{2}$.

Ainsi, $-1 + \sqrt{3} \notin D_2$ et $-1 - \sqrt{3} \in D_2$. D'où, sur le domaine D_2 , l'ensemble des solutions $S_2 = \{-1 - \sqrt{3}\}$.

En conclusion, on a $S = S_1 \cup S_2 = \{-1 - \sqrt{3}, 4\}$.

Exercice 3

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la propriété " $u_n = \frac{n}{n+1}$ ".

Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation ($n=0$): $\frac{0}{0+1} = 0$ et $u_0 = 0$ selon l'énoncé.

Ainsi, P_0 est bien vraie.

Hérédité. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{n}{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

On sait que $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ selon l'énoncé

$$= \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Donc P_{n+1} est bien vraie, d'où l'hérédité.

En conclusion, on a bien montré par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$$

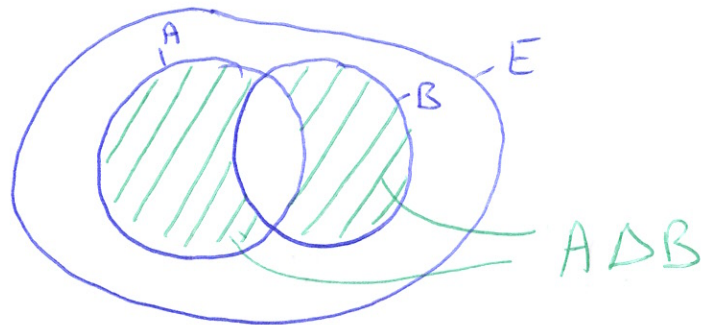
Exercice 4

1. Selon la définition, on a :

$$\begin{aligned} B \Delta A &= (B \cup A) \setminus (B \cap A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ par symétrie de } \cup \text{ et } \cap. \\ &= A \Delta B \end{aligned}$$

On a donc bien : $A \Delta B = B \Delta A$.

2.



3. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$ donc $A \Delta \emptyset = A \setminus \emptyset = A$

$A \cup A = A$ et $A \cap A = A$ donc $A \Delta A = A \setminus A = \emptyset$

$A \cup E = E$ et $A \cap E = A$ donc $A \Delta E = E \setminus A = \bar{A}$

$$\begin{aligned} 4. A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= (\underbrace{A \cap \bar{A}}_{\emptyset}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\underbrace{B \cap \bar{A}}_{\emptyset}) \cup (\underbrace{B \cap \bar{B}}_{\emptyset}) \text{ par distributivité} \end{aligned}$$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

D'où

$$\begin{aligned} 5. \overline{A \Delta B} &= \overline{(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)} = (\overline{A \cap \bar{B}}) \cap (\overline{\bar{A} \cap B}) \\ &= (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) \\ &= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap A) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\overline{A \Delta B} = (\overline{A \cap \bar{B}}) \cap (\overline{\bar{A} \cap B}) = (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$$

On retrouve la même expression.

De même, $A \Delta \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

Ainsi, on a bien $\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B}$

Exercice 5

1. La seule contrainte est donnée par la racine carrée :

$$5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

Donc (E) est définie sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{5}, +\infty \right[$$

2. a) from math import *

b) def est_solution(x):

$$y = 2 * x - \text{sqrt}(5 * x - 1)$$

if floor(y) == 0 :

return True

else:

return False

$$\begin{aligned} 3. \dots \lfloor 2 \times \frac{1}{5} - \sqrt{5 \times \frac{1}{5} - 1} \rfloor &= \lfloor \frac{2}{5} - \sqrt{1 - 1} \rfloor = \lfloor \frac{2}{5} \rfloor = 0 \text{ donc } \frac{1}{5} \text{ est solution} \\ \cdot \lfloor 2 \times \frac{1}{2} - \sqrt{5 \times \frac{1}{2} - 1} \rfloor &= \lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \rfloor \neq 0 \text{ car } \sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1 \text{ donc } \lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \rfloor < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $x_2 = \frac{1}{2}$ n'est pas solution de (E)

• $[2 \times 1 - \sqrt{5 \times 1 - 1}] = [2 - \sqrt{4}] = [0] = 0$ donc 1 est solution.

• $[2 \times 12 - \sqrt{5 \times 12 - 1}] = [24 - \sqrt{59}]$ or $\sqrt{59} < \sqrt{64} = 8$ donc

$24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$. Donc $[24 - \sqrt{59}] \geq 16$:

12 n'est pas solution de (E).

4) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a: $[a] \leq a < [a] + 1$

5) On a $[a] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq a < 1$, donc:

(E) $\Leftrightarrow 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1} < 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$ et $2x - \sqrt{5x-1} < 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{5x-1} \leq 2x$ et $2x-1 < \sqrt{5x-1}$

D'où: (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-1} \leq 2x & (E_2) \\ \sqrt{5x-1} > 2x-1 & (E_1) \end{cases}$

6) (E_2) : $2x$ est nécessairement positif, puisqu'il est supérieur à une racine carrée.

Sur $\mathbb{D} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{D}$, on peut élever au carré:

$(E_2) \Leftrightarrow 5x-1 \leq 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 \geq 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$: on a deux racines, $\frac{5 \pm 3}{8}$, soient

1 et $\frac{1}{4}$. $a = 4 > 0$ donc le trinôme est positif en

l'extérieur des racines, sur $]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[$.

D'où $\mathcal{S}_2 = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[$ (en se restreignant à $\mathbb{D}$).

(E_1) :

$\rightarrow$ Si $2x-1 < 0$, c'est-à-dire $x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}[$, alors

l'inéquation est toujours vraie.

$\rightarrow$ Sinon, c'est-à-dire $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, on peut élever au

carré: $(E_1) \Leftrightarrow 5x-1 > 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 2 < 0$

$\Delta = 81 - 32 = 49 = 7^2$, donc on a 2 racines $\frac{9 \pm 7}{8}$,

soit $\frac{1}{4}$ et 2. $a = 4 > 0$ donc le trinôme est négatif entre

les racines, sur $]\frac{1}{4}, 2[$. Ainsi:

$\mathcal{S}_1 = [\frac{1}{2}, 2[\cup [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}[= [\frac{1}{5}, 2[$

7) Les solutions de (E) sont les réels x qui sont à la fois solutions de (E_1) et (E_2) . Ainsi:

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [\frac{1}{5}, 2[\cap ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[)$

D'où: $\mathcal{S} = [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

Exercice 6:

$y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif} \end{cases}$

Donc la fonction mystère renvoie True si x est positif et False sinon: elle permet de déterminer le signe de x .